Г. Н. ВОРОБЬЕВА А. Н. ДАНИЛОВА

ПРАКТИКУМ по вычислительной математике

Г. Н. ВОРОБЬЕВА, А. Н. ДАНИЛОВА

ПРАКТИКУМ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для учащихся средних специальных учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1990

ББК 22.19
В 75
УДК 518(075)

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук В. В. Клюев (НИИ вычислительной математики и процессов управления Ленинградского Государственного университета); преп. Скворцова О. М. (Московский приборостроительный техникум)

Воробьева Г. Н., Данилова А. Н.

В 75 Практикум по вычислительной математике: Учеб. пособие для техникумов.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Высш. школа, 1990.— 208 с.: ил.

ISBN 5-06-001544-0

Пособие представляет собой руководство к выполнению лабораторно-практических работ по курсу «Вычислительная математика». Материал разбит на главы, в которых дается набор работ по темам в соответствии с программой. Каждая работа начинается с задания, общего для любого из имеющихся 30 вариантов. В конце работы приводится образец ее выполнения и оформления. В основу пособия положена книга тех же авторов «Практикум по численным методам» (1979).

В $\frac{1602120000(4308000000)—484}{001(01)—90}$ 94—90 **ББК 22.19**

518

ISBN 5-06-001544-0
© Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова, 1990

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная вычислительная техника требует от инженеров и техников знаний основ вычислительной математики и применения этих знаний к решению различных практических задач.

Вычислительная математика является одной из основных дисциплин, необходимых для подготовки специалистов, работающих в различных областях народного хозяйства.

Настоящее пособие представляет собой руководство к выполнению лабораторно-практических работ по вычислительной математике. Книга составлена в соответствии с программой для учащихся техникумов, обучающихся по специальности 1735 «Программирование для быстродействующих математических машин», но может быть использована для подготовки техников и инженеров других специальностей, имеющих в своих учебных планах вычислительную математику.

Пособие позволяет преподавателю выдать индивидуальное задание каждому учащемуся из группы в 30 человек. Все задания имеют одинаковую степень сложности. Весь материал разбит на главы, в которых дается набор работ по соответствующей теме. Каждая работа начинается с задания, которое одинаково для любого из 30 вариантов. В конце работы приводится образец ее выполнения и оформления.

В пособие также включены работы, выходящие за рамки действующей программы и предназначенные для наиболее подготовленных учащихся.

В Приложении 1 содержатся все соотношения и формулы, необходимые для выполнения работ. В Приложении 2 приводятся блок-схемы, с помощью которых можно выполнить некоторые работы, а в Приложении 3 — примеры программ некоторых расчетов на микрокалькуляторе «Электроника БЗ-34».

Лабораторно-практические работы должны выполняться на микрокалькуляторах. Для выполнения работ группу следует делить на подгруппы.

Первое издание книги вышло под названием «Практикум по численным методам». Настоящее издание переработано, дополнено и значительно отличается от предыдущего.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам канд. физ.-мат. наук В. В. Клюеву и препод. О. М. Скворцовой за ценные замечания, способствовавшие улучшению данного пособия.

Авторы

Глава I

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Работа 1

Задание. 1) Определить, какое равенство точнее.
2) Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки: а) в узком смысле; б) в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.
3) Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.

№ 1. 1) $\sqrt{44}=6{,}63$; $19/41=0{,}463$.
2) а) 22,553 ($\pm$0,016);
б) 2,8546; $\delta=0{,}3\%$.
3) а) 0,2387; б) 42,884.

№ 2. 1) $7/15=0{,}467$; $\sqrt{30}=5{,}48$.
2) а) 17,2834; $\delta=0{,}3\%$.
б) 6,4257 ($\pm$0,0024).
3) а) 3,751; б) 0,537.

№ 3. 1) $\sqrt{10{,}5}=3{,}24$; $4/17=0{,}235$.
2) а) 34,834; $\delta=0{,}1\%$;
б) 0,5748 ($\pm$0,0034).
3) а) 11,445; б) 2,043.

№ 4. 1) $15/7=2{,}14$; $\sqrt{10}=3{,}16$.
2) а) 2,3485 ($\pm$0,0042);
б) 0,34484; $\delta=0{,}4\%$.
3) а) 2,3445; б) 0,745.

№ 5. 1) $6/7=0{,}857$; $\sqrt{4{,}8}=2{,}19$.
2) а) 5,435 ($\pm$0,0028);
б) 10,8441; $\delta=0{,}5\%$.
3) а) 8,345; б) 0,288.

№ 6. 1) $12/11=1{,}091$; $\sqrt{6{,}8}=2{,}61$.
2) а) 8,24163; $\delta=0{,}2\%$;
б) 0,12356 ($\pm$0,00036).
3) а) 12,45; б) 3,4453.

№ 7. 1) $2/21=0{,}095$; $\sqrt{22}=4{,}69$.
2) а) 2,4543 ($\pm$0,0032);
б) 24,5643; $\delta=0{,}1\%$.
3) а) 0,374; б) 4,348.

№ 8. 1) $23/15=1{,}53$; $\sqrt{9{,}8}=3{,}13$.
2) а) 23,574; $\delta=0{,}2\%$;
б) 8,3445 ($\pm$0,0022).
3) а) 20,43; б) 0,576.

№ 9. 1) $6/11=0{,}545$; $\sqrt{83}=9{,}11$.
2) а) 21,68563; $\delta=0{,}3\%$;
б) 3,7834 ($\pm$0,0041).
3) а) 41,72; б) 0,678.

№ 10. 1) $17/19=0{,}895$; $\sqrt{52}=7{,}21$.
2) а) 13,537 ($\pm$0,0026);
б) 7,521; $\delta=0{,}12\%$.
3) а) 5,634; б) 0,0748.

№ 11. 1) $21/29=0{,}723$; $\sqrt{44}=6{,}63$.
2) а) 0,3567; $\delta=0{,}042\%$;
б) 13,6253 ($\pm$0,0021).
3) а) 18,357; б) 2,16.

№ 12. 1) $50/19=2{,}63$; $\sqrt{27}=5{,}19$.
2) а) 1,784 ($\pm$0,0063);
б) 0,85637; $\delta=0{,}21\%$.
3) а) 0,5746; б) 236,58.

№ 13. 1) $13/17=0{,}764$; $\sqrt{31}=5{,}56$.
2) а) 3,6878 ($\pm$0,0013);
б) 15,873; $\delta=0{,}42\%$.
3) а) 14,862; б) 8,73.

№ 14. 1) $7/22=0{,}318$; $\sqrt{13}=3{,}60$.
2) а) 27,1548 ($\pm$0,0016);
б) 0,3945; $\delta=0{,}16\%$.
3) а) 0,3648; б) 21,7.

№ 15. 1) $17/11=1{,}545$; $\sqrt{18}=4{,}24$.
2) а) $0{,}8647$ $(\pm 0{,}0013)$;
б) $24{,}3618$; $\delta=0{,}22\%$.
3) а) $2{,}4516$; б) $0{,}863$.

№ 16. 1) $5/3=1{,}667$; $\sqrt{38}=6{,}16$.
2) а) $3{,}7542$; $\delta=0{,}32\%$;
б) $0{,}98351$ $(\pm 0{,}00042)$.
3) а) $62{,}74$; б) $0{,}389$.

№ 17. 1) $49/13=3{,}77$; $\sqrt{14}=3{,}74$.
2) а) $83{,}736$; $\delta=0{,}085\%$;
б) $5{,}6483$ $(\pm 0{,}0017)$.
3) а) $5{,}6432$; б) $0{,}00858$.

№ 18. 1) $13/7=1{,}857$; $\sqrt{7}=2{,}64$.
2) а) $2{,}8867$; $\delta=0{,}43\%$;
б) $32{,}7486$ $(\pm 0{,}0012)$.
3) а) $0{,}0384$; б) $63{,}745$.

№ 19. 1) $19/12=1{,}58$; $\sqrt{12}=3{,}46$.
2) а) $4{,}88445$ $(\pm 0{,}00052)$;
б) $0{,}096835$; $\delta=0{,}32\%$.
3) а) $12{,}688$; б) $4{,}636$.

№ 20. 1) $51/11=4{,}64$; $\sqrt{35}=5{,}91$.
2) а) $38{,}4258$ $(\pm 0{,}0014)$;
б) $0{,}66385$; $\delta=0{,}34\%$.
3) а) $6{,}743$; б) $0{,}543$.

№ 21. 1) $18/7=2{,}57$; $\sqrt{22}=4{,}69$.
2) а) $0{,}39642$ $(\pm 0{,}00022)$;
б) $46{,}453$; $\delta=0{,}15\%$.
3) а) $15{,}644$; б) $6{,}125$.

№ 22. 1) $19/9=2{,}11$; $\sqrt{17}=4{,}12$.
2) а) $5{,}8425$; $\delta=0{,}23\%$.
б) $0{,}66385$ $(\pm 0{,}00042)$.
3) а) $0{,}3825$; б) $24{,}6$.

№ 23. 1) $16/7=2{,}28$; $\sqrt{11}=3{,}32$.
2) а) $24{,}3872$; $\delta=0{,}34\%$;
б) $0{,}75244$ $(\pm 0{,}00013)$.
3) а) $16{,}383$; б) $5{,}734$.

№ 24. 1) $20/13=1{,}54$; $\sqrt{63}=7{,}94$.
2) а) $2{,}3684$ $(\pm 0{,}0017)$;
б) $45{,}7832$; $\delta=0{,}18\%$.
3) а) $0{,}573$; б) $3{,}6761$.

№ 25. 1) $12/7=1{,}71$; $\sqrt{47}=6{,}86$.
2) а) $72{,}354$; $\delta=0{,}24\%$;
б) $0{,}38725$ $(\pm 0{,}00112)$.
3) а) $18{,}275$; б) $0{,}00644$.

№ 26. 1) $6/7=0{,}857$; $\sqrt{41}=6{,}40$.
2) а) $0{,}36127$ $(\pm 0{,}00034)$;
б) $46{,}7843$; $\delta=0{,}32\%$.
3) а) $3{,}425$; б) $7{,}38$.

№ 27. 1) $23/9=2{,}56$; $\sqrt{87}=9{,}33$.
2) а) $23{,}7564$; $\delta=0{,}44\%$;
б) $4{,}57633$ $(\pm 0{,}00042)$.
3) а) $3{,}75$; б) $6{,}8343$.

№ 28. 1) $27/31=0{,}872$; $\sqrt{42}=6{,}48$.
2) а) $15{,}8372$ $(\pm 0{,}0026)$;
б) $0{,}088748$; $\delta=0{,}56\%$.
3) а) $3{,}643$; б) $72{,}385$.

№ 29. 1) $7/3=2{,}33$; $\sqrt{58}=7{,}61$.
2) а) $3{,}87683$; $\delta=0{,}33\%$;
б) $13{,}5726$ $(\pm 0{,}0072)$.
3) а) $26{,}3$; б) $4{,}8556$.

№ 30. 1) $14/17=0{,}823$; $\sqrt{53}=7{,}28$.
2) а) $0{,}66835$ $(\pm 0{,}00115)$;
б) $23{,}3748$; $\delta=0{,}27\%$.
3) а) $43{,}813$; б) $0{,}645$.

Образец выполнения задания

1) $9/11=0{,}818$; $\sqrt{18}=4{,}24$; 2) а) $72{,}353$ $(\pm 0{,}026)$; б) $2{,}3544$; $\delta=0{,}2\%$; 3) а) $0{,}4357$; б) $12{,}384$.

---

1) Находим значения данных выражений с бóльшим числом десятичных знаков: $a_1=9/11=0{,}81818\ldots$, $a_2=\sqrt{18}=4{,}2426\ldots$. Затем вычисляем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\alpha_{a_1}=|0{,}81818-0{,}818|\leqslant 0{,}00019,\quad \alpha_{a_2}=|4{,}2426-4{,}24|\leqslant 0{,}0027.$$

Предельные относительные погрешности составляют

$$\delta_{a_1}=\frac{\alpha_{a_1}}{a_1}=\frac{0{,}00019}{0{,}818}=0{,}00024=0{,}024\%;$$

$$\delta_{a_2}=\frac{\alpha_{a_2}}{a_2}=\frac{0{,}0027}{4{,}24}=0{,}00064=0{,}064\%.$$

Так как $\delta_{a_1} < \delta_{a_2}$, то равенство $9/11 = 0{,}818$ является более точным.

2) а) Пусть $72{,}353\ (\pm 0{,}026) = a$. Согласно условию, погрешность $\alpha_a = 0{,}026 < 0{,}05$; это означает, что в числе 72,353 верными в узком смысле являются цифры 7, 2, 3. По правилам округления найдем приближенное значение числа, сохранив десятые доли:

$$a_1 = 72{,}4;\quad \alpha_{a_1} = \alpha_a + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}026 + 0{,}047 = 0{,}073.$$

Полученная погрешность больше 0,05; значит, нужно уменьшить число цифр в приближенном числе до двух:

$$a_2 = 72;\quad \alpha_{a_2} = \alpha_a + \Delta_{\text{окр}} = 0{,}026 + 0{,}353 = 0{,}379.$$

Так как $\alpha_{a_2} < 0{,}5$, то обе оставшиеся цифры верны в узком смысле.

б) Пусть $a = 2{,}3544$; $\delta_a = 0{,}2\%$; тогда $\alpha_a = a \cdot \delta_a = 0{,}00471$. В данном числе верными в широком смысле являются три цифры, поэтому округляем его, сохраняя эти три цифры:

$$a_1 = 2{,}35;\quad \alpha_{a_1} = 0{,}0044 + 0{,}00471 = 0{,}00911 < 0{,}01.$$

Значит, и в округленном числе 2,35 все три цифры верны в широком смысле.

3) а) Так как все четыре числа $a = 0{,}4357$ верны в узком смысле, то абсолютная погрешность $\alpha_a = 0{,}00005$, а относительная погрешность $\delta_a = 1/(2 \cdot 4 \cdot 10^3) = 0{,}000125 = 0{,}0125\%$.

б) Так как все пять цифр числа $a = 12{,}384$ верны в широком смысле, то $\alpha_a = 0{,}001$; $\delta_a = 1/(1 \cdot 10^4) = 0{,}0001 = 0{,}01\%$.

Работа 2

Задание. 1) Вычислить и определить погрешности результата.
2) Вычислить и определить погрешности результата.
3) Вычислить, пользуясь правилами подсчета цифр.

№ 1. 1) $X = \dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$

	а	б	в
a	3,85 (±0,01)	4,16 (±0,005)	7,27 (±0,01)
b	2,0435 (±0,0004)	12,163 (±0,002)	5,205 (±0,002)
c	962,6 (±0,1)	55,18 (±0,01)	87,32 (±0,03)

2) $X = \left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$

	а	б	в
a	4,3 (±0,05)	5,2 (±0,04)	2,13 (±0,01)
b	17,21 (±0,02)	15,32 (±0,01)	22,16 (±0,03)
c	8,2 (±0,05)	7,5 (±0,05)	6,3 (±0,04)
m	12,417 (±0,003)	21,823 (±0,002)	16,825 (±0,004)
n	8,37 (±0,005)	7,56 (±0,003)	8,13 (±0,002)

3) $S=\frac{h^2}{18}:\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$

	а	б	в
a	1,141	2,234	5,813
b	3,156	4,518	1,315
h	1,14	4,48	2,56

№ 2. 1) $X=\frac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$

	а	б	в
a	228,6 ($\pm$0,06)	315,6 ($\pm$0,05)	186,7 ($\pm$0,04)
b	86,4 ($\pm$0,02)	72,5 ($\pm$0,03)	66,6 ($\pm$0,02)
c	68,7 ($\pm$0,05)	53,8 ($\pm$0,04)	72,3 ($\pm$0,03)

2) $X=\frac{m^3(a+b)}{c-d}$

	а	б	в
a	13,5 ($\pm$0,02)	18,5 ($\pm$0,03)	11,8 ($\pm$0,02)
b	3,7 ($\pm$0,02)	5,6 ($\pm$0,02)	7,4 ($\pm$0,03)
m	4,22 ($\pm$0,004)	3,42 ($\pm$0,003)	5,82 ($\pm$0,005)
c	34,5 ($\pm$0,02)	26,3 ($\pm$0,01)	26,7 ($\pm$0,03)
d	23,725 ($\pm$0,005)	14,782 ($\pm$0,006)	11,234 ($\pm$0,004)

3) $M=\frac{(a+b)h^3}{4}+\frac{(a+b)h}{12}$

	а	б	в
a	8,53	6,44	9,05
b	6,271	5,323	3,244
h	12,48	15,44	20,18

№ 3. 1) $X=\frac{\sqrt{ab}}{c}$

	а	б	в
a	3,845 ($\pm$0,004)	4,632 ($\pm$0,003)	7,312 ($\pm$0,004)
b	16,2 ($\pm$0,05)	23,3 ($\pm$0,04)	18,4 ($\pm$0,03)
c	10,8 ($\pm$0,1)	11,3 ($\pm$0,06)	20,2 ($\pm$0,08)

2) $X=\dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$

	а	б	в
a	2,754 (±0,001)	3,236 (±0,002)	4,523 (±0,003)
b	11,7 (±0,04)	15,8 (±0,03)	10,8 (±0,02)
m	0,56 (±0,005)	0,64 (±0,004)	0,85 (±0,003)
c	10,536 (±0,002)	12,415 (±0,003)	9,318 (±0,002)
d	6,32 (±0,008)	7,18 (±0,006)	4,17 (±0,004)

3) $N=\dfrac{(a+b)^2}{2h}+\dfrac{(a^2+b^2)h}{5}$

	а	б	в
a	0,562	0,834	0,445
b	0,2518	0,3523	0,4834
h	0,68	0,74	0,87

№ 4. 1) $X=\dfrac{a^2b}{c}$

	а	б	в
a	3,456 (±0,002)	1,245 (±0,001)	0,327 (±0,005)
b	0,642 (±0,0005)	0,121 (±0,0002)	3,147 (±0,0001)
c	7,12 (±0,004)	2,34 (±0,003)	1,78 (±0,001)

2) $X=\dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$

	а	б	в
a	23,16 (±0,02)	17,41 (±0,01)	32,37 (±0,03)
b	8,23 (±0,005)	1,27 (±0,002)	2,35 (±0,001)
c	145,5 (±0,08)	342,3 (±0,04)	128,7 (±0,02)
d	28,6 (±0,1)	11,7 (±0,1)	27,3 (±0,04)
m	0,28 (±0,006)	0,71 (±0,003)	0,93 (±0,001)

3) $V=\dfrac{h}{3}\cdot S\left(1+\dfrac{a}{A}+\dfrac{a^2}{A^2}\right)$

	а	б	в
a	8,51	5,71	7,28
A	23,42	32,17	11,71
S	45,8	51,7	21,8
h	3,81	2,42	5,31

№ **5.** 1) $X=\dfrac{ab^3}{c}$

	а	б	в
a	0,643 (±0,0005)	0,142 (±0,0003)	0,258 (±0,0002)
b	2,17 (±0,002)	1,71 (±0,002)	3,45 (±0,001)
c	5,843 (±0,001)	3,727 (±0,001)	7,221 (±0,003)

2) $X=\dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$

	а	б	в
a	27,16 (±0,006)	15,71 (±0,005)	12,31 (±0,004)
b	5,03 (±0,01)	3,28 (±0,02)	1,73 (±0,03)
c	3,6 (±0,02)	7,2 (±0,01)	3,7 (±0,02)
m	12,375 (±0,004)	13,752 (±0,001)	17,428 (±0,003)
n	86,2 (±0,05)	33,7 (±0,03)	41,7 (±0,01)

3) $S=\dfrac{h^2}{18}\cdot\dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$

	а	б	в
h	21,1	17,8	32,5
a	22,08	32,47	27,51
b	31,11	11,42	21,78

№ **6.** 1) $X=\dfrac{ab}{c^2}$

	а	б	в
a	0,3575 (±0,0002)	0,1756 (±0,0001)	0,2731 (±0,0003)
b	2,63 (±0,01)	3,71 (±0,03)	5,12 (±0,02)
c	0,854 (±0,0005)	0,285 (±0,0002)	0,374 (±0,0001)

2) $X=\dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$

	а	б	в
a	16,342 (±0,001)	12,751 (±0,001)	31,456 (±0,002)
b	2,5 (±0,03)	3,7 (±0,02)	7,3 (±0,01)
c	38,17 (±0,002)	23,76 (±0,003)	33,28 (±0,003)
d	9,14 (±0,005)	8,12 (±0,004)	6,71 (±0,001)
m	3,6 (±0,04)	1,7 (±0,01)	5,8 (±0,02)

3) $V=\frac{1}{6}\pi h(3a^2+h^2)$

	а	б	в
a	2,456	7,751	5,441
h	1,76	3,35	6,17

№ 7. 1) $V=\frac{\pi^2}{4}Dd^2$

	а	б	в
π	3,14	3,14	3,14
D	54 (±0,5)	72 (±0,3)	31 (±0,01)
d	8,235 (±0,001)	3,274 (±0,002)	7,345 (±0,001)

2) $S=\frac{1}{64}\pi\sqrt{D^4-d^4}$

	а	б	в
D	36,5 (±0,1)	41,4 (±0,2)	52,6 (±0,01)
d	26,35 (±0,005)	31,75 (±0,003)	48,39 (±0,001)
π	3,14	3,14	3,14

3) $a=c^2\left(1+\frac{2\beta}{c}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)$

	а	б	в
c	2,435	7,834	4,539
β	0,15	0,21	0,34
γ	1,27	3,71	5,93

№ 8. 1) $Y=\frac{m^2n}{c^3}$

	а	б	в
m	1,6531 (±0,0003)	2,348 (±0,002)	3,804 (±0,003)
n	3,78 (±0,002)	4,37 (±0,004)	4,05 (±0,003)
c	0,158 (±0,0005)	0,235 (±0,0003)	0,318 (±0,0002)

2) $X=\frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$

	а	б	в
a	9,542 (±0,001)	8,357 (±0,003)	4,218 (±0,001)
b	3,128 (±0,002)	2,48 (±0,004)	1,57 (±0,006)

	а	б	в
m	2,8 ($\pm$0,03)	3,17 ($\pm$0,01)	2,32 ($\pm$0,02)
c	0,172 ($\pm$0,001)	1,315 ($\pm$0,0004)	2,418 ($\pm$0,004)
d	5,4 ($\pm$0,02)	2,4 ($\pm$0,02)	1,8 ($\pm$0,01)

3) $V=\frac{1}{15}\pi h\left(2D^2+Dd+0{,}75d^2\right)$

	а	б	в
h	84,2	76	45
D	28,3	17,2	48,3
d	42,08	9,344	32,14

№ 9. 1) $X=\sqrt{\frac{cd}{b}}$

	а	б	в
c	0,7568 ($\pm$0,0002)	0,8345 ($\pm$0,0004)	0,6384 ($\pm$0,0002)
d	21,7 ($\pm$0,02)	13,8 ($\pm$0,03)	32,7 ($\pm$0,04)
b	2,65 ($\pm$0,01)	1,84 ($\pm$0,006)	4,88 ($\pm$0,03)

2) $y=\frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$

	а	б	в
a	10,82 ($\pm$0,03)	9,37 ($\pm$0,004)	11,45 ($\pm$0,01)
b	2,786 ($\pm$0,0006)	3,108 ($\pm$0,0003)	4,431 ($\pm$0,002)
m	0,28 ($\pm$0,006)	0,46 ($\pm$0,002)	0,75 ($\pm$0,003)
n	14,7 ($\pm$0,06)	15,2 ($\pm$0,04)	16,7 ($\pm$0,05)

3) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=(a+b+c)/2$

	а	б	в
a	46,3	10,5	2,48
b	29,72	34,18	5,344
c	37,654	27,327	6,0218

№ 10. 1) $f=\frac{Qe^3}{48E}$

	а	б	в
Q	54,8 ($\pm$0,02)	38,5 ($\pm$0,01)	17,3 ($\pm$0,03)
e	2,45 ($\pm$0,01)	3,35 ($\pm$0,02)	5,73 ($\pm$0,01)
E	0,863 ($\pm$0,004)	0,734 ($\pm$0,001)	0,956 ($\pm$0,004)

2) $Q=\dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$

	а	б	в
n	2,0435 ($\pm$0,0001)	1,1753 ($\pm$0,0002)	4,5681 ($\pm$0,0001)
x	4,2 ($\pm$0,05)	5,8 ($\pm$0,01)	6,3 ($\pm$0,02)
y	0,82 ($\pm$0,01)	0,65 ($\pm$0,02)	0,42 ($\pm$0,03)

3) $\gamma=\dfrac{\alpha b-\beta a}{b^2}-\dfrac{\beta(ab-\beta a)}{b^2(b+\beta)}$

	а	б	в
α	5,27	7,31	3,28
β	0,0562	0,0761	0,0545
a	158,35	234,36	341,17
b	61,21	81,26	52,34

Образец выполнения задания

1) $X=\dfrac{m^2n^3}{\sqrt{k}}$, где $m=28{,}3\ (\pm0{,}02)$, $n=7{,}45\ (\pm0{,}01)$, $k=0{,}678\ (\pm0{,}003)$;

2) $N=\dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, где $n=3{,}0567\ (\pm0{,}0001)$, $m=5{,}72\ (\pm0{,}02)$;

3) $V=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$, где $h=11{,}8$; $R=23{,}67$.

1) Находим $m^2=800{,}9$; $n^3=413{,}5$; $\sqrt{k}=0{,}8234$;

$$X=\frac{800{,}9\cdot413{,}5}{0{,}8234}=402\,200=4{,}02\cdot10^5.$$

Далее, имеем $\delta_m=0{,}02/28{,}3=0{,}00071$; $\delta_n=0{,}01/7{,}45=0{,}00135$; $\delta_k=0{,}003/0{,}678=0{,}00443$, откуда

$\delta_X=2\delta_m+3\delta_n+0{,}5\delta_k=0{,}00142+0{,}00405+0{,}00222=0{,}00769=0{,}77\%$;

$\alpha_X=4{,}02\cdot10^5\cdot0{,}0077=3{,}1\cdot10^3$.

Ответ: $X=4{,}02\cdot10^5(\pm3{,}1\cdot10^3)$; $\delta_X=0{,}77\%$.

2) Имеем $n-1=2{,}0567\ (\pm0{,}0001)$; $m+n=3{,}057\ (\pm0{,}0004)+5{,}72\ (\pm0{,}02)=8{,}777\ (\pm0{,}0204)$; $m-n=5{,}72\ (\pm0{,}02)-3{,}057\,(\pm0{,}0004)=2{,}663\ (\pm0{,}0204)$;

$$N=\frac{2{,}0567\cdot8{,}777}{2{,}663^2}=\frac{2{,}0567\cdot8{,}777}{7{,}092}=2{,}545\approx2{,}55;$$

$$\delta_N=\frac{0{,}0001}{2{,}0567}+\frac{0{,}0204}{8{,}777}+2\frac{0{,}0204}{2{,}663}=0{,}000049+0{,}00233+2\cdot0{,}00766=$$

$$=0{,}00238+0{,}01532=0{,}0177=1{,}77\%;\quad \alpha_N=2{,}55\cdot0{,}0177=0{,}046.$$

Ответ: $N\approx2{,}55\ (\pm0{,}046)$; $\delta_N=1{,}77\%$.

3) Находим

$$V=3{,}142\cdot11{,}8^2(23{,}67-3{,}933)=3{,}142\cdot11{,}8^2\cdot19{,}737=$$
$$=3{,}142\cdot139{,}2\cdot19{,}737=437{,}37\cdot19{,}737=8630\approx8{,}63\cdot10^3.$$

Ответ: $V\approx8{,}63\cdot10^3$.

Глава II

АЛГЕБРА МАТРИЦ

Работа 1

Задание. Обратить матрицу методом разбиения ее на клетки.

№ 1. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 3\\0 & -1 & 3 & -1\\3 & 1 & 0 & 2\\1 & -2 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

№ 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 4 & 2 & 3\\1 & 10 & 3 & 6\\6 & 10 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

№ 3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\2 & -1 & -2 & -3\\3 & 2 & -1 & 2\\2 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

№ 4. $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1 & 0\\1 & -3 & 3 & 7\\2 & -1 & 2 & -3\\-5 & 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

№ 5. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\-1 & 2 & 2 & 0\\0 & -1 & 1 & 4\\1 & 1 & -1 & -1{,}5\end{pmatrix}$.

№ 6. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2 & 0\\2 & 1 & 1 & -2\\3 & -1 & 2 & 1\\1 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

№ 7. $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 0 & 2\\-1 & 1 & 1 & -1\\2 & 3 & 1 & -6\\1 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

№ 8. $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0 & 1\\3 & 2 & -1 & 2\\0 & 2 & 2 & 1\\-1 & 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$.

№ 9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\-1 & -3 & 3 & -1\\0 & 4 & -10 & 2\\1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

№ 10. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 0\\0 & 4 & 1 & 2\\-1 & 2 & 4 & 1\\1 & 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

№ 11. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\1 & 2 & -1 & 1\\3 & 0 & -1 & -3\\1 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

№ 12. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 0\\-1 & -3 & 3 & -1\\1 & 3 & -8 & 1\\1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

№ 13. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\-1 & 1 & 3 & 0\\0 & 2 & -1 & 1\\3 & -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

№ 14. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3 & 2\\-2 & 2 & 2 & 1\\0 & 1 & 2 & 0\\-1 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

№ 15. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 4\\0 & 1 & 5 & 1\\-3 & 4 & 10 & 1\\0 & -6 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

№ 16. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3 & 3\\2 & 2 & 1 & 3\\1 & 0 & 2 & 0\\1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

№ 17. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\2 & 3 & 2 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

№ 18. $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1 & 3\\2 & 1 & 0 & -1\\3 & 2 & 1 & -3\\4 & 3 & 2 & -4\end{pmatrix}$.

№ 19. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\3 & -1 & -1 & -2\\2 & 3 & -1 & -1\\1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

№ 20. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\2 & -1 & -2 & -3\\3 & 2 & -1 & 2\\2 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

№ 21. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 22. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

№ 23. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

№ 24. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

№ 25. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

№ 26. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 27. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

№ 28. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

№ 29. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

№ 30. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Образец выполнения задания

$$S=\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Пусть $S=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$; тогда $S^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right)$,

где $N=(D-CA^{-1}B)^{-1}$, $L=-A^{-1}BN$, $M=-NCA^{-1}$, $K=A^{-1}-A^{-1}BM$. Матрица A^{-1} находится легче, чем D^{-1}.

Последовательно находим:

1. A^{-1}; $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\Delta=1$; $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $A^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

3. $CA^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $CA^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$;

5. $D-CA^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$;

6. $N=\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}^{-1}$; $\Delta=-100$; $A_{11}=-5$; $A_{12}=10$; $A_{21}=9$; $A_{22}=2$;

$$N=\begin{pmatrix} 1/20 & -9/100 \\ -1/10 & -1/50 \end{pmatrix};$$

7. $L=-A^{-1}BN=-\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/20 & -9/100 \\ -1/10 & -1/50 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7/20 & -23/100 \\ -1/10 & 29/50 \end{pmatrix}$;

8. $M=-NCA^{-1}=-\begin{pmatrix} 1/20 & -9/100 \\ -1/10 & -1/50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13/100 & 14/100 \\ 7/50 & -4/50 \end{pmatrix}$;

9. $K=A^{-1}-A^{-1}BM=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13/100 & 14/100 \\ 7/50 & -4/50 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -11/100 & -58/100 \\ 106/100 & 68/100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11/100 & -42/100 \\ -6/100 & 32/100 \end{pmatrix};$$

10. $S^{-1}=\begin{pmatrix} 11/100 & -42/100 & 7/20 & -23/100 \\ -6/100 & 32/100 & -1/10 & 29/50 \\ 13/100 & 14/100 & 1/20 & -9/100 \\ 7/50 & -4/50 & -1/10 & -1/50 \end{pmatrix}.$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 11/100 & -42/100 & 7/20 & -23/100 \\ -6/100 & 32/100 & -1/10 & 29/50 \\ 13/100 & 14/100 & 1/20 & -9/100 \\ 7/50 & -4/50 & -1/10 & -1/50 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Работа 2

Задание. Обратить матрицу методом окаймления. При выполнении работы воспользоваться вариантами работы 1.

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $A_n=\begin{pmatrix} A_{n-1} & U_n \\ V_n & a_{nn} \end{pmatrix}$. Каждый этап процесса выполняется по следующей схеме:

A_{n-1}^{-1}	U_n	$-A_{n-1}^{-1}U_n$
V_n	a_{nn}	
$-V_nA_{n-1}^{-1}$		α_n

где $\alpha_n=a_{nn}+\left(-V_nA_{n-1}^{-1}\right)U_n$.

Элементы обратной матрицы вычисляются по следующим формулам:

$$d_{ik}=d'_{ik}+\frac{\gamma_{ni}\beta_{kn}}{\alpha_n},\quad d_{nk}=\frac{\gamma_{nk}}{\alpha_n},\quad d_{in}=\frac{\beta_{in}}{\alpha_n},\quad d_{nn}=\frac{1}{\alpha_n},$$

где $\beta_{1n}, \beta_{2n}, \ldots, \beta_{n-1,n}$ — элементы столбца $\left(-A_{n-1}^{-1}U_n\right)$; γ_{n1}, $\gamma_{n2}, \ldots, \gamma_{n.n-1}$ — элементы строки $\left(-V_nA_{n-1}^{-1}\right)$.

Обращение матрицы четвертого порядка выполняется в три этапа; их результатами являются матрицы A_2^{-1}, A_3^{-1}, A_4^{-1}.

Вычисления следует оформить в таблицу, содержащую результаты всех промежуточных действий:

			$-A_1^{-1}U_2$		
A_1^{-1}	1	1	-1		
V_2	-1	$a_{22}=0$			
$-V_2A_1^{-1}$	1		$\alpha_2=1$	$-A_2^{-1}U_3$	
A_2^{-1}	0	-1	3	3	
	1	1	3	-6	
V_3	2	1	$\alpha_{33}=2$		
$V_3A_2^{-1}$	-1	1		$\alpha_3=2$	$-A_3^{-1}U_4$
A_3^{-1}	$-3/2$	$1/2$	$3/2$	4	$23/2$
	4	-2	-3	-2	-29
	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	-3	$9/2$
V_4	1	2	-1	$\alpha_{44}=1$	
$-V_4A_3^{-1}$	-7	4	5		$\alpha_4=-50$
A_4^{-1}	$11/100$	$-21/50$	$7/20$	$-23/100$	
	$-3/50$	$8/25$	$-1/10$	$29/50$	
	$13/100$	$7/50$	$1/20$	$-9/100$	
	$7/50$	$-2/25$	$-1/10$	$-1/50$	

I этап. 1. $a_{11}=1$, $A_1^{-1}=(\alpha_{11})=(1)$; $\alpha_{11}=\dfrac{1}{a_{11}}$.

Рядом с матрицей A_1^{-1} запишем окаймляющие ее значения V_2, U_2, a_{22}, взятые из данной матрицы.

2. $-A_1^{-1}U_2=-(1)(1)=(-1)=(\beta_{12})$.

3. $-V_2A_1^{-1}=-(-1)(1)=(1)=(\gamma_{21})$.

4. $\alpha_2=a_{22}+(-V_2A_1^{-1}U_2)=0+(1)(1)=1$.

5. По приведенным выше формулам найдем элементы матрицы $A_2^{-1}=(d_{ij})$:

$$d_{11}=1+\frac{1(-1)}{1}=0;\quad d_{12}=\frac{1}{-1}=-1;\quad d_{21}=\frac{1}{1}=1;\quad d_{22}=\frac{1}{1}=1.$$

II этап. 1. Рядом с найденной матрицей A_2^{-1} выписываем из данной матрицы A окаймляющие значения U_3, V_3, a_{33}.

2. $-A_2^{-1}U_3=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_{13}\\ \beta_{23}\end{pmatrix}$.

3. $-V_3A_2^{-1}=-(2;\ 1)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=(-1;\ 1)=(\gamma_{31};\ \gamma_{32})$.

4. $\alpha_3=a_{33}+(-V_3A_2^{-1}U_3)$.

Произведение $-V_3A_2^{-1}U_3$ найдем двумя способами, что можно использовать для проверки правильности вычислений:

$$(-V_3A_2^{-1})U_3=(-1;\ 1)\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}=-3+3=0;$$

$$V_3(-A_2^{-1}U_3)=(2;\ 1)\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}=6-6=0.$$

Таким образом, $\alpha_3=2+0=2$.

5. Найдем матрицу $A_3^{-1}=(d_{ij})$:

$$d_{11}=0+\frac{-1\cdot 3}{2}=-\frac{3}{2};\quad d_{12}=-1+\frac{1\cdot 3}{2}=\frac{1}{2};\quad d_{21}=1+\frac{(-1)\cdot(-6)}{2}=4;$$

$$d_{22}=1+\frac{1(-6)}{2}=-2;\quad d_{13}=\frac{\beta_{13}}{\alpha_3}=\frac{3}{2};\quad d_{23}=\frac{\beta_{23}}{\alpha_3}=\frac{-6}{2}=-3;$$

$$d_{31}=\frac{\gamma_{31}}{\alpha_3}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2};\quad d_{32}=\frac{\gamma_{32}}{\alpha_3}=\frac{1}{2};\quad d_{33}=\frac{1}{\alpha_3}=\frac{1}{2}.$$

Значит,

$$A_3^{-1}=\begin{pmatrix}-3/2 & 1/2 & 3/2\\ 4 & -2 & -3\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

При выполнении вычислений вручную их правильность можно проверить с помощью равенства $A_3A_3^{-1}=E_3$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3/2 & 1/2 & 3/2\\ 4 & -2 & -3\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

III этап. Все вычисления аналогичны проведенным на предыдущих двух этапах.

1. Выписываем окаймляющие значения U_4, V_4, a_{44}.

2. $$-A_3^{-1}U_4=-\begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23/2 \\ -29 \\ 9/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_{14} \\ \beta_{24} \\ \beta_{34} \end{pmatrix}.$$

3. $$-V_4A_3^{-1}=-(1;\ 2;\ -1)\begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 3/2 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}=(-7;\ 4;\ 5).$$

4. $\alpha_4=a_{44}+(-V_4A_3^{-1}U_4)$;

$$(-V_4A_3^{-1})U_4=(-7;\ 4;\ 5)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}=-28-8-15=-51;$$

$$V_4(-A_3^{-1}U_4)=(1;\ 2;\ -1)\begin{pmatrix} 23/2 \\ -29 \\ 9/2 \end{pmatrix}=\frac{23}{2}-58-\frac{9}{2}=-51;$$

$\alpha_4=1+(-51)=-50.$

5. Найдем матрицу $A_4^{-1}=(d_{ij})$:

$$d_{11}=-\frac{3}{2}+\frac{(-7)(23/2)}{-50}=\frac{11}{100};\quad d_{12}=\frac{1}{2}+\frac{4(23/2)}{-50}=-\frac{21}{50};$$

$$d_{13}=\frac{3}{2}+\frac{5(23/2)}{-50}=\frac{7}{20};\quad d_{21}=4+\frac{(-7)(-29)}{-50}=\frac{3}{-50};$$

$$d_{22}=-2+\frac{4(-29)}{-50}=\frac{8}{25};\quad d_{23}=-3+\frac{5(-29)}{-50}=-\frac{1}{10};$$

$$d_{31}=-\frac{1}{2}+\frac{(-7)\cdot 9/2}{-50}=\frac{13}{100};\quad d_{32}=\frac{1}{2}+\frac{4\cdot 9/3}{-50}=\frac{14}{100}=\frac{7}{50};$$

$$d_{33}=\frac{1}{2}+\frac{5(9/2)}{-50}=\frac{1}{20};\quad d_{41}=\frac{-7}{-50}=\frac{7}{50};\quad d_{42}=\frac{4}{-50}=-\frac{2}{25};\quad d_{43}=\frac{5}{-50}=-\frac{1}{10};$$

$$d_{44}=\frac{1}{-50}=-\frac{1}{50};\quad d_{14}=\frac{23/2}{-50}=-\frac{23}{100};\quad d_{24}=\frac{-29}{-50}=\frac{29}{50};\quad d_{34}=\frac{9/2}{-50}=-\frac{9}{100}.$$

Итак,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}11 & -0{,}42 & 0{,}35 & -0{,}23 \\ -0{,}06 & 0{,}32 & -0{,}1 & 0{,}58 \\ 0{,}13 & 0{,}14 & 0{,}05 & -0{,}09 \\ 0{,}14 & -0{,}08 & -0{,}1 & -0{,}02 \end{pmatrix}.$$

Этот результат совпадает с матрицей, найденной в предыдущей работе.

Работа 3

Задание. Обратить матрицу методом разбиения ее на произведение двух треугольных матриц. При выполнении работы воспользоваться вариантами работы 1.

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение состоит из следующих этапов:

I. Представление матрицы A в виде произведения $A=T_1T_2$, где T_1 и T_2 — треугольные матрицы.

II. Обращение матриц T_1 и T_2, т. е. нахождение матриц T_1^{-1} и T_2^{-1}.

III. Нахождение искомой матрицы A^{-1} с помощью умножения найденных матриц: $A^{-1}=T_2^{-1}T_1^{-1}$.

I. Для отыскания матриц T_1 и T_2 используют схему

	Элементы матриц				Σ
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	c_1
A	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	c_2
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	c_3
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	c_4
	t_{11} 1	r_{12}	r_{13}	r_{13}	c'_1
	t_{21}	t_{22} 1	r_{23}	r_{24}	c'_2
T_1T_2	t_{31}	t_{32}	t_{33} 1	r_{34}	c'_3
	t_{41}	t_{42}	t_{43}	t_{44} 1	c'_4

Столбец Σ является контрольным; числа c_1, c_2, c_3, c_4 — строчные суммы.

Элементы схемы находят в следующем порядке:

1. $t_{11}=a_{11}$; $t_{21}=a_{21}$; $t_{31}=a_{31}$; $t_{41}=a_{41}$.

2. $r_{12}=\dfrac{a_{12}}{t_{11}}$; $r_{13}=\dfrac{a_{13}}{t_{11}}$; $r_{14}=\dfrac{a_{14}}{t_{11}}$; $c'_1=\dfrac{c_1}{t_{11}}$.

Контрольное соотношение: $c'_1=1+r_{12}+r_{13}+r_{14}$.

3. $t_{22}=a_{22}-t_{21}r_{22}$; $t_{32}=a_{32}-t_{31}r_{12}$; $t_{42}=a_{42}-t_{41}r_{12}$.

4. $r_{23}=\dfrac{a_{23}-t_{21}r_{13}}{t_{22}}$; $r_{24}=\dfrac{a_{24}-t_{21}r_{14}}{t_{22}}$; $c'_2=\dfrac{c_2-t_{21}c'_1}{t_{22}}$.

Контрольное соотношение: $c'_2=1+r_{23}+r_{24}$.

5. $t_{33}=a_{33}-t_{31}r_{13}-t_{32}r_{23}$; $t_{43}=a_{43}-t_{41}r_{13}-t_{42}r_{23}$.

6. $r_{34}=\dfrac{a_{34}-t_{31}r_{14}-t_{32}r_{24}}{t_{23}}$; $c'_3=\dfrac{c_3-t_{31}c'_1-t_{32}c'_2}{t_{33}}$.

Контрольное соотношение: $c'_3=1+r_{34}$.

7. $t_{44}=a_{44}-t_{41}r_{14}-t_{42}r_{24}-t_{43}r_{34}$;

$$c'_4=\frac{c_4-t_{11}c'-t_{42}c'_2-t_{43}c'_3}{t_{44}}.$$

Контрольное соотношение: $c'_4=1$.

Из найденных элементов составляют матрицы

$$T_1=\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В данном случае имеем

	Элементы матриц				Σ
	1	1	3	4	9
A	−1	0	3	−2	0
	2	1	2	−3	2
	1	2	−1	1	3
	1 1	1	3	4	9
	−1	1 1	6	2	9
$T_1 T_2$	2	−1	2 1	−4,5	−3,5
	1	1	−10	−50 1	

$$t_{22}=0-(-1)\cdot 1=1;\quad t_{32}=1-2\cdot 1=-1;\quad t_{42}=2-1\cdot 1=1,$$

$$r_{23}=\frac{3-(-1)\cdot 3}{1}=6;\quad r_{24}=\frac{-2-(-1)\cdot 4}{1}=2;\quad c'_2=\frac{0-(-1)\cdot 9}{1}=9.$$

(контрольное соотношение: $1+6+2=9=c'_2$);

$$t_{33}=2-2\cdot 3-(-1)\cdot 6=2;\quad t_{43}=-1-1\cdot 3-1\cdot 6=-10;$$

$$r_{34}=\frac{-3-2\cdot 4-(-1)\cdot 2}{2}=4{,}5;\quad c'_3=\frac{2-2\cdot 9-(-1)\cdot 9}{2}=-3{,}5$$

(контрольное соотношение: $1+(-4{,}5)=-3{,}5=c'_3$);

$$t_{44}=1-1\cdot 4-1\cdot 2-(-10)\cdot(-4{,}5)=-50;$$

$$c'_4=\frac{3-1\cdot 9-1\cdot 9-(-10)\cdot(-3{,}5)}{-50}=1$$

(контрольное соотношение $c'_4=1$ выполняется).

Таким образом,

$$T_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -10 & -50 \end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Для определения матрицы T_1^{-1} воспользуемся равенством $T_1T_1^{-1}=E$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -10 & -50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с этим равенством получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{11}=1, & x_{22}+2x_{32}=0, \\ -x_{11}+x_{21}=0, & x_{22}-10x_{32}+50x_{42}=0, \\ 2x_{11}-x_{21}+2x_{31}=0, & 2x_{33}=1, \\ x_{11}+x_{21}-10x_{31}-50x_{41}=0, & -10x_{33}-50x_{43}=0, \\ x_{22}=1; & -50x_{44}=1. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$x_{11}=1;\ x_{21}=1;\ x_{31}=-1/2;\ x_{41}=7/50;\ x_{22}=1;\ x_{32}=1/2;$$
$$x_{42}=-2/25;\ x_{33}=1/2;\ x_{43}=-1/10;\ x_{44}=-1/50.$$

Следовательно,

$$T_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 7/50 & -2/25 & -1/10 & -1/50 \end{pmatrix}$$

Для определения матрицы T_2^{-1} составим равенство $T_2T_2^{-1}=E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 1 & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_{12}+1=0, \\ x_{13}+x_{23}+3=0, \\ x_{23}+6=0, \end{cases}\quad \begin{cases} x_{14}+x_{24}+3x_{34}+4=0, \\ x_{24}+6x_{34}+2=0, \\ x_{34}-4{,}5=0, \end{cases}$$

откуда $x_{12}=-1$; $x_{23}=-6$; $x_{13}=3$; $x_{34}=4{,}5$; $x_{24}=-29$; $x_{14}=11{,}5$. Значит,

$$T_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 11{,}5 \\ 0 & 1 & -6 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. Используя равенство $A^{-1}=T_2^{-1}T_1^{-1}$, находим

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 11{,}5 \\ 0 & 1 & -6 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 7/50 & -2/25 & -1/10 & -1/50 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 11/100 & -21/50 & 7/20 & -23/100 \\ -6/100 & 8/25 & -1/10 & 29/50 \\ 13/100 & 7/50 & 1/20 & -9/100 \\ 7/50 & -2/25 & -1/10 & -1/50 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с матрицей, полученной в работах 1 и 2.

Глава III

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа 1

Задание. 1) Решить систему по формулам Крамера.
2) Решить систему с помощью обратной матрицы.
3) Выполнить действия над матрицами.
4) Решить уравнение

№ 1. 1) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1; \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4; \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6; \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+8y-z=-7; \\ x+2y+3z=1; \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

3) $2(A+B)(2B-A)$,

где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$.

№ 2. 1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6; \\ x_1-x_2-2x_3-3x_4=8; \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4; \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+z=4; \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$

3) $3A-(A+2B)B$,

где $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 11 & 3\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 2 & 16\end{pmatrix}.$

№ 3. 1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5;\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1;\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1;\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+2y+z=5;\\ 2x+3y+z=1;\\ 2x+y+3z=11.\end{cases}$

3) $2(A-B)(A^2+B)$,

где $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 7\\ -10 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & -2 & 6\\ 2 & 4 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}.$

№ 4. 1) $\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5;\\ x_1-2x_3+3x_4=-4;\\ 3x_1+2x_2-5x_4=12;\\ 4x_1+3x_2-5x_3=5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31;\\ 5x_1+x_2+2x_3=29;\\ 3x_1-x_2+x_3=10.\end{cases}$

3) $(A^2-B^2)(A+B)$,

где $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & -14 & 3\\ 6 & -7 & 0\\ 11 & 3 & 15\end{pmatrix}.$

№ 5. 1) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12;\\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0;\\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4;\\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x-3y+2z=9;\\ 2x+5y-3z=4;\\ 5x+6y-2z=18.\end{cases}$

3) $(A-B^2)(2A+B)$,

где $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 10 & 4 & 1\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 2 & 7 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}.$

№ 6. 1) $\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3-4x_4=20;\\ 3x_1+x_2-2x_3=9;\\ 5x_1-7x_2+10x_4=-9;\\ 3x_2-5x_3=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4;\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11;\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11.\end{cases}$

3) $(A-B)A+2B$,

где $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 1 & 5\\ -2 & 2 & -1\\ 17 & 1 & 7\end{pmatrix}.$

№ 7. 1) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8; \\ x_1-3x_2-6x_4=9; \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5; \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4; \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

3) $2(A-0{,}5B)+AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

№ 8. 1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4; \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6; \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6; \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1-x_2=5; \\ -2x_1+x_2+x_3=0; \\ 2x_1-x_2+4x_3=15. \end{cases}$

3) $(A-B)A+3B$,

где $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

№ 9. 1) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=8; \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5; \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1; \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=10. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=4; \\ 2x_1-5x_2-3x_3=-17; \\ x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

3) $2A-(A^2+B)B$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 10. 1) $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_4=-9; \\ x_1-3x_2+4x_3=-7; \\ 3x_2-2x_3+4x_4=12; \\ x_1+2x_2-x_3-3x_4=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1-x_2-6x_3=-1; \\ 3x_1-2x_2=8. \end{cases}$

3) $3(A^2-B^2)-2AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 11. 1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1; \\ 2x_1-x_2-3x_4=2; \\ 3x_1-x_3+x_4=-3; \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1; \\ x_1+x_2+x_3=6; \\ 3x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$

3) $(2A - B)(3A + B) - 2AB$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

№ 12. 1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3; \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8; \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$

3) $A(A^2 - B) - 2(B + A)B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

№ 13. 1) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7; \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16; \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

3) $(A + B)A - B(2A + 3B)$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

№ 14. 1) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 16; \\ 3x - 2y - 5z = 12. \end{cases}$

3) $A(2A + B) - B(A - B)$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 15. 1) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8; \\ 2x - y - 3z = -1; \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

3) $3(A+B)(AB-2A)$,

где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 16. 1) $\begin{cases} x_1+5x_2=2; \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4; \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6; \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=7; \\ x_1+3x_2-2x_3=0; \\ 2x_2-x_3=2. \end{cases}$

3) $2AB-(A+B)(A-B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 12 & 15 & -6 \\ 9 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 21 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 8 & 7 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 16 & 16 & 13 \end{pmatrix}$.

№ 17. 1) $\begin{cases} x_1-4x_2-x_4=2; \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1; \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6; \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=20; \\ 2x_1-x_2-3x_3=3; \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

3) $2A+3B(AB-2A)$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -3 & 11 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 18. 1) $\begin{cases} 5x_1-x_2+x_3+3x_4=-4; \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6; \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8; \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1-x_2=4; \\ 2x_1+3x_2+x_3=1; \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$

3) $(A-B)(A+B)-2AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 19. 1) $\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3-4x_4=3; \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=1; \\ 3x_1-x_3+x_4=-3; \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=7; \\ 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

3) $2A-AB(B-A)+B$,

где $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

№ 20. 1) $\begin{cases}2x_1-x_3-2x_4=-1;\\ x_2+2x_3-x_4=2;\\ x_1-x_2-x_4=-1;\\ -x_1+3x_2-2x_3=0.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}11x+3y-z=2;\\ 2x+5y-5z=0;\\ x+y+z=2.\end{cases}$

3) $A^2-(A+B)(A-3B)$,

где $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1\end{pmatrix}$.

№ 21. 1) $\begin{cases}-x_1+x_2+x_3+x_4=4;\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1;\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1;\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}7x+5y+2z=18;\\ x-y-z=3;\\ x+y+2z=-2.\end{cases}$

3) $B(A+2B)-3AB$,

где $A=\begin{pmatrix}7 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

№ 22. 1) $\begin{cases}5x_1+3x_2-7x_3+3x_4=1;\\ x_2-3x_3+4x_4=-5;\\ x_1-2x_3-3x_4=-4;\\ 4x_1+3x_2-5x_3=5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+3y+z=1;\\ x+z=0;\\ x-y-z=2.\end{cases}$

3) $3(A+B)-(A-B)A$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}7 & 0 & -5\\ 4 & 11 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

№ 23. 1) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0;\\ x_1+2x_3-2x_4=1;\\ x_1-x_2-x_4=-1;\\ -x_1+3x_2-2x_3=0.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-2y-2z=3;\\ x+y-2z=0;\\ x-y-z=1.\end{cases}$

3) $A(A-B)+2B(A+B)$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 5 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

№ 24. 1) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+3x_4=-6;\\ 3x_1-x_2+x_3+5x_4=3;\\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=28;\\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x_1+x_2-5x_3=-7;\\ 2x_1-3x_2+4x_3=-1;\\ 5x_1-x_2+3x_3=0.\end{cases}$

3) $(2A+B)B-0{,}5A$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

№ 25. 1) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3+2x_4=-3;\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=3;\\ x_1-3x_2-x_3-3x_4=0;\\ 4x_1+2x_2+2x_3+5x_4=-15.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=15;\\ 2x_1+x_2+3x_3=9;\\ 2x_1+3x_2+2x_3=-2.\end{cases}$

3) $AB-2(A+B)A$,

где $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

№ 26. 1) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=-2;\\ 2x_1+3x_2+4x_3-5x_4=8;\\ 3x_1-x_2-x_3+7x_4=-2;\\ 2x_1-x_2+6x_3-3x_4=7.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1-x_2-2x_3=1;\\ 3x_1+2x_2+x_3=1;\\ 2x_1+3x_2+3x_3=0.\end{cases}$

3) $(A+2B)(3A-B)$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

№ 27. 1) $\begin{cases}3x_1+2x_2+5x_3-x_4=3;\\ 2x_1-3x_2-3x_3+4x_4=1;\\ 4x_1+x_2+3x_3+2x_4=3;\\ 5x_1-2x_2+x_3+3x_4=5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=5;\\ 3x_1+4x_2-x_3=3;\\ 4x_1+5x_2-2x_3=3.\end{cases}$

3) $2AB+A(B-A)$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

№ 28. 1) $\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3-x_4=1;\\ 3x_1+3x_2-2x_3-5x_4=2;\\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=10;\\ 3x_1+2x_2+7x_3-2x_4=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=-9;\\ x_1+2x_2+x_3=3;\\ 3x_1+x_2-x_3=-1.\end{cases}$

3) $(3A+0{,}5B)(2B-A)$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

№ 29. 1) $\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3-x_4=8;\\ 2x_1-3x_2-3x_3+x_4=-3;\\ 4x_1+2x_2+5x_3+3x_4=6;\\ x_1+2x_2-4x_3-3x_4=-3.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x_1+x_2-2x_3=4;\\ 2x_1-3x_2+x_3=9;\\ 5x_1+x_2+3x_3=-4.\end{cases}$

3) $2A(A+B)-3AB$,

где $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

№ 30. 1) $\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3+x_4=6;\\ 3x_1+x_2-x_3+5x_4=0;\\ 2x_1-x_2+3x_4=-5;\\ 2x_1+2x_2-x_3+7x_4=-3.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4;\\ x_1+3x_2-x_3=2;\\ 5x_1+2x_2+x_3=5.\end{cases}$

3) $3AB+(A-B)(A+2B)$,

где $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Образец выполнения задания

1) $\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+x_4=1;\\ 3x_1+4x_2+x_3-3x_4=-7;\\ 4x_1-2x_2+3x_3-4x_4=3;\\ 2x_1+2x_2-3x_3-x_4=-11.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1-4x_2+3x_3=1;\\ x_1+3x_2+2x_3=4;\\ 3x_1-5x_2+4x_3=1.\end{cases}$

3) $(3A+B)(2A-B)$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}13 & -4 & 6\\ 2 & -4 & 2\\ -2 & 5 & 5\end{pmatrix}$.

---

1) $$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 1 & -3\\ 4 & -2 & 3 & -4\\ 2 & 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 4 & 4 & -7\\ 8 & -2 & 7 & -2\\ -2 & 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}-5 & 4 & -7\\ 8 & 7 & -2\\ -2 & -1 & -3\end{vmatrix}=-(105+16+56-98+10+96)=-185;$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ -7 & 4 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 3 & -4\\ -11 & 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -11 & 4 & 9 & -7\\ 5 & -2 & -1 & -2\\ -13 & 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}-11 & 9 & -7\\ 5 & -1 & -2\\ -13 & 1 & -3\end{vmatrix}=-(-33+234-35+91-22+135)=-370;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & -7 & 1 & -3\\ 4 & 3 & 3 & -4\\ 2 & -11 & 3 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 4 & -7 & -13 & 4\\ 7 & 3 & 9 & -7\\ -1 & 11 & -25 & 10\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}4 & -13 & 4\\ 7 & 9 & -7\\ -1 & -25 & 10\end{vmatrix}=-(360-91-700+36-700+910)=185;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -7 & -3\\ 4 & -2 & 3 & -4\\ 2 & 2 & -11 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 4 & -11 & -7\\ 8 & -2 & 5 & -2\\ -2 & 2 & -13 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-5 & -11 & -7\\ 8 & 5 & -2\\ -2 & -13 & -3\end{vmatrix}=-(75-44+728-70+130-264)=-555;$$

$$\Delta_{x_4}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 1 & -7\\ 4 & -2 & 3 & 3\\ 2 & 2 & -3 & -11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 4 & 4 & -11\\ 8 & -2 & 7 & 5\\ -2 & 2 & -1 & -13\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}-5 & 4 & -11\\ 8 & 7 & 5\\ -2 & -1 & -13\end{vmatrix}=-(455-40+88-154+416-25)=-740;$$

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{-370}{-185}=2;\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{185}{-185}=-1;$$

$$x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{-555}{-185}=3;\quad x_4=\frac{\Delta_{x_4}}{\Delta}=\frac{-740}{-185}=4.$$

Ответ: $x_1=2;\ x_2=-1;\ x_3=3;\ x_4=4.$

2) $\begin{pmatrix}2&-4&3\\1&3&2\\3&-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix};$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-4&3\\1&3&2\\3&-5&4\end{vmatrix}=24-24-15-27+16+20=-6;$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3&2\\-5&4\end{vmatrix}=22;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&3\\3&-5\end{vmatrix}=-14;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-4&3\\-5&4\end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=-1;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&-4\\3&-5\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-4&3\\3&2\end{vmatrix}=-17;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=-1;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&-4\\1&3\end{vmatrix}=10;$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}22&1&-17\\2&-1&-1\\-14&-2&10\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}22&1&-17\\2&-1&-1\\-14&-2&10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1{,}5\\0{,}5\\2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=-1{,}5;\ x_2=0{,}5;\ x_3=2.$

3) $3A+B=\begin{pmatrix}3&6&-3\\0&6&-9\\3&-3&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&1\\-1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7&0\\1&6&-8\\2&0&7\end{pmatrix};$

$$2A-B=\begin{pmatrix}2&4&-2\\0&4&-6\\2&-2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&3\\1&0&1\\-1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&-5\\-1&4&-7\\3&-5&3\end{pmatrix};$$

$$(3A+B)\cdot(2A-B)=$$

$$=\begin{pmatrix}5&7&0\\1&6&-8\\2&0&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&-5\\-1&4&-7\\3&-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&43&-74\\-30&67&-71\\21&-29&11\end{pmatrix}.$$

4) Имеем $AX=B$, откуда $X=A^{-1}B$. Находим

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&-1\\0&1&-2\\1&-1&0\end{vmatrix}=-6+1-2=-7;$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&-2\\-1&0\end{vmatrix}=-2;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}0&-2\\1&0\end{vmatrix}=-2;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=2;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -5\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix};$$

$$X=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -5\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13 & -4 & 6\\ 2 & -4 & 2\\ -2 & 5 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-14 & -21 & -35\\ -28 & 14 & 0\\ -7 & -7 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Работа 2

Задание. Используя схему Гаусса, решить систему уравнений с точностью до 0,001.

№ 1.

$$\begin{cases}4{,}4x_1-2{,}5x_2+19{,}2x_3-10{,}8x_4=4{,}3,\\ 5{,}5x_1-9{,}3x_2-14{,}2x_3+13{,}2x_4=6{,}8,\\ 7{,}1x_1-11{,}5x_2+5{,}3x_3-6{,}7x_4=-1{,}8,\\ 14{,}2x_1+23{,}4x_2-8{,}8x_3+5{,}3x_4=7{,}2.\end{cases}$$

№ 2.

$$\begin{cases}8{,}2x_1-3{,}2x_2+14{,}2x_3+14{,}8x_4=-8{,}4,\\ 5{,}6x_1-12x_2+15x_3-6{,}4x_4=4{,}5,\\ 5{,}7x_1+3{,}6x_2-12{,}4x_3-2{,}3x_4=3{,}3,\\ 6{,}8x_1+13{,}2x_2-6{,}3x_3-8{,}7x_4=14{,}3.\end{cases}$$

№ 3.

$$\begin{cases}5{,}7x_1-7{,}8x_2-5{,}6x_3-8{,}3x_4=2{,}7,\\ 6{,}6x_1+13{,}1x_2-6{,}3x_3+4{,}3x_4=-5{,}5,\\ 14{,}7x_1-2{,}8x_2+5{,}6x_3-12{,}1x_4=8{,}6,\\ 8{,}5x_1+12{,}7x_2-23{,}7x_3+5{,}7x_4=14{,}7.\end{cases}$$

№ 4.

$$\begin{cases}3{,}8x_1+14{,}2x_2+6{,}3x_3-15{,}5x_4=2{,}8,\\ 8{,}3x_1-6{,}6x_2+5{,}8x_3+12{,}2x_4=-4{,}7,\\ 6{,}4x_1-8{,}5x_2-4{,}3x_3+8{,}8x_4=7{,}7,\\ 17{,}1x_1-8{,}3x_2+14{,}4x_3-7{,}2x_4=13{,}5.\end{cases}$$

№ 5.

$$\begin{cases}15{,}7x_1+6{,}6x_2-5{,}7x_3+11{,}5x_4=-2{,}4,\\ 8{,}8x_1-6{,}7x_2+5{,}5x_3-4{,}5x_4=5{,}6,\\ 6{,}3x_1-5{,}7x_2-23{,}4x_3+6{,}6x_4=7{,}7,\\ 14{,}3x_1+8{,}7x_2-15{,}7x_3-5{,}8x_4=23{,}4.\end{cases}$$

№ 6.

$$\begin{cases}4{,}3x_1-12{,}1x_2+23{,}2x_3-14{,}1x_4=15{,}5,\\ 2{,}4x_1-4{,}4x_2+3{,}5x_3+5{,}5x_4=2{,}5,\\ 5{,}4x_1+8{,}3x_2-7{,}4x_3-12{,}7x_4=8{,}6,\\ 6{,}3x_1-7{,}6x_2+1{,}34x_3+3{,}7x_4=12{,}1.\end{cases}$$

№ 7.

$$\begin{cases}14{,}4x_1-5{,}3x_2+14{,}3x_3-12{,}7x_4=-14{,}4,\\ 23{,}4x_1-14{,}2x_2-5{,}4x_3+2{,}1x_4=6{,}6,\\ 6{,}3x_1-13{,}2x_2-6{,}5x_3+14{,}3x_4=9{,}4,\\ 5{,}6x_1+8{,}8x_2-6{,}7x_3-23{,}8x_4=7{,}3.\end{cases}$$

№ 8.

$$\begin{cases}1{,}7x_1+10x_2-1{,}3x_3+2{,}1x_4=3{,}1,\\ 3{,}1x_1+1{,}7x_2-2{,}1x_3+5{,}4x_4=2{,}1,\\ 3{,}3x_1-7{,}7x_2+4{,}4x_3-5{,}1x_4=1{,}9,\\ 10x_1-20{,}1x_2+20{,}4x_3+1{,}7x_4=1{,}8.\end{cases}$$

№ 9.

$$\begin{cases}1{,}7x_1-1{,}8x_2+1{,}9x_3-57{,}4x_4=10,\\ 1{,}1x_1-4{,}3x_2+1{,}5x_3-1{,}7x_4=19,\\ 1{,}2x_1+1{,}4x_2+1{,}6x_3+1{,}8x_4=20,\\ 7{,}1x_1-1{,}3x_2-4{,}1x_3+5{,}2x_4=10.\end{cases}$$

№ 10.

$$\begin{cases}6{,}1x_1+6{,}2x_2-6{,}3x_3+6{,}4x_4=6{,}5,\\ 1{,}1x_1-1{,}5x_2+2{,}2x_3-3{,}8x_4=4{,}2,\\ 5{,}1x_1-5{,}0x_2+4{,}9x_3-4{,}8x_4=4{,}7,\\ 1{,}8x_1+1{,}9x_2+2{,}0x_3-2{,}1x_4=2{,}2.\end{cases}$$

№ 11.
$$\begin{cases}2{,}2x_1-3{,}1x_2+4{,}2x_3-5{,}1x_4=6{,}01,\\1{,}3x_1+2{,}2x_2-1{,}4x_3+1{,}5x_4=10,\\6{,}2x_1-7{,}4x_2+8{,}5x_3-9{,}6x_4=1{,}1,\\1{,}2x_1+1{,}3x_2+1{,}4x_3+4{,}5x_4=1{,}6.\end{cases}$$

№ 12.
$$\begin{cases}35{,}8x_1+2{,}1x_2-34{,}5x_3-11{,}8x_4=0{,}5,\\27{,}1x_1-7{,}5x_2+11{,}7x_3-23{,}5x_4=12{,}8,\\11{,}7x_1+1{,}8x_2-6{,}5x_3+7{,}1x_4=1{,}7,\\6{,}3x_1+10x_2+7{,}1x_3+3{,}4x_4=20{,}8.\end{cases}$$

№ 13.
$$\begin{cases}35{,}1x_1+1{,}7x_2+37{,}5x_3-2{,}8x_4=7{,}5,\\45{,}2x_1+21{,}1x_2-1{,}1x_3-1{,}2x_4=11{,}1,\\-21{,}1x_1+31{,}7x_2+1{,}2x_3-1{,}5x_4=2{,}1,\\31{,}7x_1+18{,}1x_2-31{,}7x_3+2{,}2x_4=0{,}5.\end{cases}$$

№ 14.
$$\begin{cases}1{,}1x_1+11{,}2x_2+11{,}1x_3-13{,}1x_4=1{,}3,\\-3{,}3x_1+1{,}1x_2+30{,}1x_3-20{,}1x_4=1{,}1,\\7{,}5x_1+1{,}3x_2+1{,}1x_3+10x_4=20,\\1{,}7x_1+7{,}5x_2-1{,}8x_3+2{,}1x_4=1{,}1.\end{cases}$$

№ 15.
$$\begin{cases}7{,}5x_1+1{,}8x_2-2{,}1x_3-7{,}7x_4=1{,}1,\\-10x_1+1{,}3x_2-20x_3-1{,}4x_4=1{,}5,\\2{,}8x_1-1{,}7x_2+3{,}9x_3+4{,}8x_4=1{,}2,\\10x_1+31{,}4x_2-2{,}1x_3-10x_4=-1{,}1.\end{cases}$$

№ 16.
$$\begin{cases}30{,}1x_1-1{,}4x_2+10x_3-1{,}5x_4=10,\\-17{,}5x_1+11{,}1x_2+1{,}3x_3-7{,}5x_4=1{,}3,\\1{,}7x_1-21{,}1x_2+7{,}1x_3-17{,}1x_4=10,\\2{,}1x_1+2{,}1x_2+3{,}5x_3+3{,}3x_4=1{,}7.\end{cases}$$

№ 17.
$$\begin{cases}7{,}3x_1-8{,}1x_2+12{,}7x_3-6{,}7x_4=8{,}8,\\11{,}5x_1+6{,}2x_2-8{,}3x_3+9{,}2x_4=21{,}5,\\8{,}2x_1-5{,}4x_2+4{,}3x_3-2{,}5x_4=6{,}2,\\2{,}4x_1+11{,}5x_2-3{,}3x_3+14{,}2x_4=-6{,}2.\end{cases}$$

№ 18.
$$\begin{cases}4{,}8x_1+12{,}5x_2-6{,}3x_3-9{,}7x_4=3{,}5,\\22x_1-31{,}7x_2+12{,}4x_3-8{,}7x_4=4{,}6,\\15x_1+21{,}1x_2-4{,}5x_3+14{,}4x_4=15,\\8{,}6x_1-14{,}4x_2+6{,}2x_3+2{,}8x_4=-1{,}2.\end{cases}$$

№ 19.
$$\begin{cases}6{,}4x_1+7{,}2x_2-8{,}3x_3+42x_4=2{,}23,\\5{,}8x_1-8{,}3x_2+14{,}3x_3-6{,}2x_4=17{,}1,\\8{,}6x_1+7{,}7x_2-18{,}3x_3+8{,}8x_4=-5{,}4,\\13{,}2x_1-5{,}2x_2-6{,}5x_3+12{,}2x_4=6{,}5.\end{cases}$$

№ 20.
$$\begin{cases}14{,}2x_1+3{,}2x_2-4{,}2x_3+8{,}5x_4=13{,}2,\\6{,}3x_1-4{,}3x_2+12{,}7x_3-5{,}8x_4=-4{,}4,\\8{,}4x_1-22{,}3x_2-5{,}2x_3+4{,}7x_4=6{,}4,\\2{,}7x_1+13{,}7x_2+6{,}4x_3-12{,}7x_4=8{,}5.\end{cases}$$

№ 21.
$$\begin{cases}7{,}3x_1+12{,}4x_2-3{,}8x_3-14{,}3x_4=5{,}8,\\10{,}7x_1-7{,}7x_2+12{,}5x_3+6{,}6x_4=-6{,}6,\\15{,}6x_1+6{,}6x_2+14{,}4x_3-8{,}7x_4=12{,}4,\\7{,}5x_1+12{,}2x_2-8{,}3x_3+3{,}7x_4=9{,}2.\end{cases}$$

№ 22.
$$\begin{cases}13{,}2x_1-8{,}3x_2-4{,}4x_3+6{,}2x_4=6{,}8,\\8{,}3x_1+4{,}2x_2-5{,}6x_3+7{,}7x_4=12{,}4,\\5{,}8x_1-3{,}7x_2+12{,}4x_3-6{,}2x_4=8{,}7,\\3{,}5x_1+6{,}6x_2-13{,}8x_3-9{,}3x_4=-10{,}8.\end{cases}$$

№ 23.
$$\begin{cases}8{,}1x_1+1{,}2x_2-9{,}1x_3+1{,}7x_4=10,\\1{,}1x_1-1{,}7x_2+7{,}2x_3-3{,}4x_4=1{,}7,\\1{,}7x_1-1{,}8x_2+10x_3+2{,}3x_4=2{,}1,\\1{,}3x_1+1{,}7x_2-9{,}9x_3+3{,}5x_4=27{,}1.\end{cases}$$

№ 24.
$$\begin{cases}3{,}3x_1-2{,}2x_2-10x_3+1{,}7x_4=1{,}1,\\1{,}8x_1+21{,}1x_2+1{,}3x_3-2{,}2x_4=2{,}2,\\-10x_1+1{,}1x_2+20x_3-4{,}5x_4=10,\\70x_1-1{,}7x_2-2{,}2x_3+3{,}3x_4=2{,}1.\end{cases}$$

№ 25.
$$\begin{cases}1{,}7x_1+9{,}9x_2-20x_3-1{,}7x_4=1{,}7,\\20x_1+0{,}5x_2-30{,}1x_3-1{,}1x_4=2{,}1,\\10x_1-20x_2+30{,}2x_3+0{,}5x_4=1{,}8,\\3{,}3x_1-0{,}7x_2+3{,}3x_3+20x_4=-1{,}7.\end{cases}$$

№ 26.
$$\begin{cases}1{,}7x_1-1{,}3x_2-1{,}1x_3-1{,}2x_4=2{,}2,\\10x_1-10x_2-1{,}3x_3+1{,}3x_4=1{,}1,\\3{,}5x_1+3{,}3x_2+1{,}2x_3+1{,}3x_4=1{,}2,\\1{,}3x_1+1{,}1x_2-1{,}3x_3-1{,}1x_4=10.\end{cases}$$

№ 27.
$$\begin{cases}1{,}1x_1+11{,}3x_2-1{,}7x_3+1{,}8x_4=10,\\1{,}3x_1-11{,}7x_2+1{,}8x_3+1{,}4x_4=1{,}3,\\1{,}1x_1-10{,}5x_2-1{,}7x_3-1{,}5x_4=1{,}1,\\1{,}5x_1-0{,}5x_2+1{,}8x_3-1{,}1x_4=10.\end{cases}$$

№ 28.
$$\begin{cases}1{,}4x_1+2{,}1x_2-3{,}3x_3+1{,}1x_4=10,\\10x_1-1{,}7x_2+1{,}1x_3-1{,}5x_4=1{,}7,\\2{,}2x_1+34{,}4x_2-1{,}1x_3-1{,}2x_4=20,\\1{,}1x_1+1{,}3x_2+1{,}2x_3+1{,}4x_4=1{,}3.\end{cases}$$

2—1258

№ 29.

$$\begin{cases} 1{,}3x_1-1{,}7x_2+3{,}3x_3+1{,}7x_4=1{,}1, \\ 10x_1+5{,}5x_2-1{,}3x_3+3{,}4x_4=1{,}3, \\ 1{,}1x_1+1{,}8x_2-2{,}2x_3-1{,}1x_4=10, \\ 1{,}3x_1-1{,}2x_2+2{,}1x_3+2{,}2x_4=1{,}8. \end{cases}$$

№ 30.

$$\begin{cases} 1{,}2x_1+1{,}8x_2-2{,}2x_3-4{,}1x_4=1{,}3, \\ 10x_1-5{,}1x_2+1{,}2x_3+5{,}5x_4=1{,}2, \\ 2{,}2x_1-30{,}1x_2+3{,}1x_3+5{,}8x_4=10, \\ 10x_1+2{,}4x_2-30{,}5x_3-2{,}2x_4=34{,}1. \end{cases}$$

Образец выполнения задания

$$\begin{cases} 0{,}68x_1+0{,}05x_2-0{,}11x_3+0{,}08x_4=2{,}15, \\ 0{,}21x_1-0{,}13x_2+0{,}27x_3-0{,}8x_4=0{,}44, \\ -0{,}11x_1-0{,}84x_2+0{,}28x_3+0{,}06x_4=-0{,}83, \\ -0{,}08x_1+0{,}15x_2-0{,}5x_3-0{,}12x_4=1{,}16. \end{cases}$$

Вычисления производим по схеме единственного деления:

Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Контрольные суммы Σ	Строчные суммы Σ'
x_1	x_2	x_3	x_4			
0,68	0,05	−0,11	0,08	2,15	2,85	2,85
0,21	−0,13	0,27	−0,8	0,44	−0,01	−0,01
−0,11	−0,84	0,28	0,06	−0,83	−1,44	−1,44
−0,08	0,15	−0,5	−0,12	1,16	0,61	0,61
1	0,0735	−0,1618	0,1176	3,1618	4,1912	4,1912
	−0,1454	0,30398	−0,8247	−0,22398	−0,89015	−0,8901
	−0,8319	0,2622	0,0729	−0,4822	−0,97897	−0,97896
	0,1559	−0,5129	−0,1106	1,4129	0,9453	0,9453
	1	−2,0906	5,6719	1,5404	6,1221	6,1217
		−1,47697	4,79139	0,7992	4,1140	4,1136
		−0,18697	−0,9948	1,1723	−0,00913	−0,0095
		1	−3,2441	−0,5411	−2,7854	−2,7851
			−1,6013	1,0711	−0,5299	−0,5302
			1	−0,6689	0,3309	0,3311
2,8264	−0,3337	−2,7110	−0,6689			
3,8263	0,6664	−1,7119	0,3309			

Ответ: $x_1=2{,}826$; $x_2=-0{,}334$; $x_3=-2{,}711$; $x_4=-0{,}669$.

Работа 3

Задание. 1) Обратить матрицу по схеме единственного деления. Все расчеты вести с четырьмя десятичными знаками. Ответ округлить до трех десятичных знаков.

2) Вычислить определитель по схеме Гаусса с точностью до 0,0001.

№ 1. 1) $\begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}47 & -0{,}11 & 0{,}55 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}35 & 0{,}17 \\ -0{,}25 & 0{,}67 & 1{,}00 & 0{,}36 \\ 0{,}54 & -0{,}32 & -0{,}74 & 1{,}00 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}$.

№ 2. 1) $\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}44 \\ -0{,}52 & 0{,}35 & 0{,}21 & -0{,}72 \\ 0{,}35 & 0{,}42 & 0{,}38 & -0{,}63 \\ 0{,}74 & -0{,}25 & 0{,}37 & 0{,}55 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}17 & -0{,}25 & 0{,}54 \\ 0{,}47 & 1{,}00 & 0{,}67 & -0{,}32 \\ -0{,}11 & 0{,}35 & 1{,}00 & -0{,}74 \\ 0{,}55 & 0{,}43 & 0{,}36 & 1{,}00 \end{vmatrix}$.

№ 3. 1) $\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}83 \\ 0{,}55 & 0{,}22 & -0{,}12 & 0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}35 & 0{,}18 \\ -0{,}37 & 0{,}23 & 0{,}15 & 0{,}28 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ -1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & 3{,}1 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \end{vmatrix}$.

№ 4. 1) $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2{,}7 & -1{,}3 & 5{,}2 \\ 2{,}7 & -3{,}4 & 1{,}8 & 2{,}2 \\ -1{,}3 & 0{,}16 & 0{,}82 & 1{,}05 \\ 5{,}2 & 2{,}2 & 1{,}05 & 3{,}4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \end{vmatrix}$.

№ 5. 1) $\begin{pmatrix} 1{,}17 & 2{,}13 & 0{,}32 & 0{,}56 \\ 2{,}13 & 0{,}82 & -0{,}72 & 1{,}10 \\ 0{,}32 & 0{,}25 & -0{,}42 & 0{,}16 \\ 0{,}56 & 1{,}10 & -0{,}25 & -0{,}44 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}47 & 1{,}00 & 0{,}67 & -0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}17 & -0{,}25 & 0{,}54 \\ 0{,}55 & 0{,}43 & 0{,}36 & 1{,}00 \\ -0{,}11 & 0{,}35 & 1{,}00 & -0{,}74 \end{vmatrix}$.

№ 6. 1) $\begin{pmatrix} 1{,}2 & 3{,}2 & -1{,}5 & 2{,}7 \\ -5{,}3 & 4{,}1 & 3{,}8 & 1{,}7 \\ 0{,}3 & 1{,}5 & -1{,}6 & 4{,}2 \\ 1{,}6 & 4{,}5 & 6{,}3 & -1{,}2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & 3{,}1 \\ 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \end{vmatrix}$.

№ 7. 1) $\begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}73 & -0{,}43 & -0{,}23 \\ 0{,}73 & 1{,}00 & 0{,}25 & 0{,}64 \\ -0{,}41 & 0{,}62 & 0{,}21 & 0{,}44 \\ 0{,}84 & 0{,}32 & 0{,}18 & -0{,}47 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \end{vmatrix}$.

№ 8. 1) $\begin{pmatrix} 1{,}13 & 2{,}15 & 0{,}83 & 0{,}77 \\ 0{,}64 & -0{,}43 & 0{,}62 & -0{,}32 \\ 2{,}32 & 1{,}15 & 1{,}84 & 0{,}68 \\ -0{,}72 & 0{,}53 & 0{,}64 & -0{,}57 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & 3{,}1 \\ 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \end{vmatrix}$.

№ 9. 1) $\begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}26 & 0{,}33 & -0{,}22 \\ 0{,}74 & -0{,}55 & 0{,}28 & -0{,}65 \\ 0{,}88 & 0{,}42 & -0{,}33 & 0{,}75 \\ 0{,}92 & 0{,}82 & -0{,}62 & 0{,}75 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}47 & 1{,}00 & 0{,}67 & -0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}17 & -0{,}25 & 0{,}54 \\ 0{,}55 & 0{,}43 & 0{,}36 & 1{,}00 \\ -0{,}11 & 0{,}35 & 1{,}00 & -0{,}74 \end{vmatrix}$.

№ 10. 1) $\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}18 & 0{,}63 & -0{,}32 \\ 0{,}92 & 0{,}38 & -0{,}14 & 0{,}56 \\ 0{,}63 & -0{,}42 & 0{,}18 & 0{,}37 \\ -0{,}65 & 0{,}52 & 0{,}47 & 0{,}27 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}$.

№ 11. 1) $\begin{pmatrix} -2,41 & 7,55 & 0,82 & 0,33 \\ 0,28 & -3,44 & 0,75 & 0,23 \\ 0,17 & 0,28 & 0,05 & 3,48 \\ -1,00 & 0,23 & 2,00 & 7,00 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1,13 & 0,15 & 0,26 & -0,43 \\ 0,45 & 0,62 & -0,80 & 0,74 \\ 0,62 & -1,12 & 0,64 & 0,78 \\ -0,13 & 0,73 & 0,16 & -0,36 \end{vmatrix}$.

№ 12. 1) $\begin{pmatrix} -1,09 & 7,56 & 3,45 & 0,78 \\ 3,33 & 4,45 & -0,21 & 3,44 \\ 2,33 & -4,45 & 0,17 & 2,21 \\ 4,03 & 1,00 & 3,05 & 0,11 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0,84 & 1,32 & 0,48 & -1,13 \\ 1,16 & -0,46 & 0,64 & -0,13 \\ 0,44 & 0,83 & -1,12 & 0,44 \\ 0,16 & 0,32 & 0,08 & -0,57 \end{vmatrix}$.

№ 13. 1) $\begin{pmatrix} 4,5 & 4,8 & -3,7 & 2,1 \\ 4,5 & -3,7 & 5,6 & 3,3 \\ 4,8 & 7,5 & 8,3 & 9,2 \\ -1,5 & 2,3 & 4,8 & 3,1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0,52 & 0,83 & -1,2 & 0,32 \\ 0,63 & -0,42 & 0,57 & 1,15 \\ 0,44 & 0,52 & 0,44 & 0,18 \\ 0,62 & -0,12 & 0,08 & 0,42 \end{vmatrix}$.

№ 14. 1) $\begin{pmatrix} 5,5 & 3,7 & -8,3 & 9,1 \\ -4,5 & 6,8 & 7,2 & 3,4 \\ 7,5 & -4,9 & 3,5 & 7,1 \\ 5,6 & -4,8 & 7,3 & 5,3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1,5 & 0,84 & 0,63 & -0,18 \\ 0,15 & 0,36 & -0,16 & 0,88 \\ -0,27 & 0,45 & 0,64 & -0,38 \\ 0,41 & -0,83 & 0,62 & 0,27 \end{vmatrix}$.

№ 15. 1) $\begin{pmatrix} 1,8 & 1,02 & 1,03 & 1,05 \\ 7,03 & 8,04 & 9,05 & 6,08 \\ 1,11 & -2,02 & 2,03 & -3,04 \\ -3,41 & 4,52 & 7,28 & 5,51 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0,8 & 1,3 & -0,12 & 0,25 \\ -1,2 & 0,18 & 0,72 & 0,13 \\ 1,6 & 0,2 & 0,12 & -0,11 \\ 1,4 & 0,15 & -0,83 & 0,41 \end{vmatrix}$.

№ 16. 1) $\begin{pmatrix} 1,71 & 3,56 & -0,33 & 0,17 \\ 2,81 & 3,45 & 0,17 & -0,22 \\ -0,34 & 0,75 & 0,33 & 0,22 \\ 7,03 & -3,45 & 0,32 & 0,17 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2,5 & 0,35 & 0,4 & -0,8 \\ 0,2 & -1,5 & 0,61 & 2,3 \\ 0,16 & -0,42 & 0,57 & 0,63 \\ 0,23 & 0,15 & -0,08 & 3,1 \end{vmatrix}$.

№ 17. 1) $\begin{pmatrix} 0,17 & -0,13 & 0,45 & 0,66 \\ 0,18 & 0,22 & -0,11 & 0,71 \\ 0,82 & 0,33 & 0,18 & -0,63 \\ -0,28 & 0,41 & 0,28 & 0,33 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \end{vmatrix}$.

№ 18. 1) $\begin{pmatrix} 1,41 & 2,42 & 3,53 & 4,48 \\ 1,28 & -3,04 & 1,09 & 1,05 \\ 7,01 & 8,03 & 9,01 & 7,04 \\ 3,15 & 4,18 & -8,11 & 7,12 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1,00 & 0,17 & -0,25 & 0,54 \\ 0,47 & 1,00 & 0,67 & -0,32 \\ -0,11 & 0,35 & 1,00 & -0,74 \\ 0,55 & 0,43 & 0,36 & 1,00 \end{vmatrix}$.

№ 19. 1) $\begin{pmatrix} 0,28 & 0,33 & 0,42 & 0,51 \\ 0,17 & 0,88 & 0,19 & 0,22 \\ -0,23 & 0,18 & 0,11 & -0,13 \\ 0,51 & 0,15 & 0,72 & -0,14 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ -1,6 & 5,4 & -7,7 & 3,1 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \end{vmatrix}$.

№ 20. 1) $\begin{pmatrix} 1,17 & 4,12 & 1,08 & 3,05 \\ 2,01 & -1,02 & 1,03 & 1,00 \\ 1,00 & 2,00 & 1,00 & 3,00 \\ 7,05 & 8,03 & -4,04 & 5,55 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1,6 & 5,4 & -7,7 & -3,1 \\ 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \end{vmatrix}$.

№ 21. 1) $\begin{pmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0,47 & 1,00 & 0,67 & -0,32 \\ 1,00 & 0,17 & -0,25 & 0,54 \\ 0,55 & 0,43 & 0,36 & 1,00 \\ -0,11 & 0,35 & 1,00 & -0,74 \end{vmatrix}$.

№ 22. 1) $\begin{pmatrix} 2{,}11 & 3{,}01 & 4{,}02 & 0{,}22 \\ 0{,}18 & 3{,}41 & 0{,}15 & 1{,}43 \\ 2{,}14 & 0{,}17 & 0{,}26 & 0{,}18 \\ 1{,}28 & 0{,}42 & 0{,}54 & 1{,}00 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}$.

№ 23. 1) $\begin{pmatrix} 7{,}13 & 8{,}21 & 4{,}47 & -2{,}11 \\ 3{,}25 & 1{,}54 & 2{,}91 & 5{,}43 \\ -6{,}34 & -8{,}17 & -10{,}2 & 3{,}93 \\ 4{,}52 & 6{,}73 & 1{,}37 & -9{,}89 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}2 & -7{,}7 & 3{,}1 & -1{,}6 \\ 0{,}7 & 1{,}4 & -8{,}5 & 4{,}8 \\ 8{,}2 & -2{,}3 & 0{,}3 & -7{,}9 \\ 0{,}55 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}4 \end{vmatrix}$.

№ 24. 1) $\begin{pmatrix} -2{,}00 & 3{,}01 & 0{,}12 & -0{,}11 \\ 2{,}92 & -0{,}17 & 0{,}11 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}52 & 3{,}17 & 2{,}11 \\ 3{,}01 & 0{,}42 & -0{,}27 & -0{,}15 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}25 & 0{,}16 & 0{,}35 & 0{,}18 \\ 1{,}2 & -0{,}8 & 0{,}62 & 0{,}34 \\ 0{,}83 & 0{,}48 & -0{,}18 & 0{,}72 \\ 0{,}43 & 0{,}57 & 0{,}62 & -0{,}13 \end{vmatrix}$.

№ 25. 1) $\begin{pmatrix} 3{,}41 & -0{,}18 & 2{,}34 & 7{,}08 \\ 0{,}21 & 0{,}17 & -0{,}51 & -0{,}44 \\ 0{,}33 & 3{,}42 & -5{,}17 & 0{,}66 \\ 0{,}77 & 3{,}68 & 0{,}22 & -0{,}19 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}0 & 2{,}14 & 0{,}42 & -1{,}13 \\ 0{,}23 & 0{,}42 & -1{,}5 & 0{,}16 \\ 0{,}34 & -0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}57 \\ 0{,}83 & -0{,}17 & 0{,}62 & -0{,}83 \end{vmatrix}$.

№ 26. 1) $\begin{pmatrix} 4{,}20 & 0{,}32 & 0{,}11 & 0{,}13 \\ 0{,}17 & 0{,}25 & 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}72 & 0{,}61 \\ 0{,}54 & 0{,}13 & 0{,}81 & 0{,}17 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}92 & 0{,}16 & -0{,}23 & 0{,}8 \\ 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}15 & 0{,}72 \\ -0{,}23 & 0{,}15 & 0{,}88 & 0{,}16 \\ 0{,}8 & 0{,}72 & -0{,}13 & 0{,}72 \end{vmatrix}$.

№ 27. 1) $\begin{pmatrix} 2{,}00 & 0{,}17 & 3{,}02 & 0{,}11 \\ 0{,}28 & 0{,}13 & 0{,}54 & 3{,}12 \\ 0{,}54 & 0{,}18 & 2{,}11 & 3{,}08 \\ 2{,}33 & 0{,}11 & 0{,}22 & 2{,}22 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}13 & 0{,}25 & 0{,}82 \\ -0{,}15 & 0{,}27 & 0{,}35 & -0{,}44 \\ 0{,}83 & 0{,}11 & 0{,}72 & -0{,}32 \\ 0{,}94 & 0{,}08 & 0{,}32 & 0{,}12 \end{vmatrix}$.

№ 28. 1) $\begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}03 & 0{,}88 & 0{,}64 & 0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}62 & -0{,}13 & 0{,}32 \\ 0{,}18 & 0{,}25 & 0{,}42 & 0{,}82 \\ 0{,}32 & 0{,}43 & 0{,}85 & 0{,}93 \end{vmatrix}$.

№ 29. 1) $\begin{pmatrix} -0{,}33 & 0{,}42 & 0{,}51 & -0{,}11 \\ 2{,}71 & -0{,}92 & -2{,}17 & 0{,}81 \\ 0{,}75 & 0{,}68 & 0{,}33 & 0{,}17 \\ 0{,}28 & -3{,}71 & 2{,}17 & 0{,}16 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}27 & 0{,}64 & 0{,}83 \\ 0{,}27 & 0{,}35 & -0{,}81 & 0{,}16 \\ 0{,}64 & -0{,}81 & -0{,}14 & 0{,}15 \\ 0{,}83 & -0{,}14 & 0{,}25 & 0{,}37 \end{vmatrix}$.

№ 30. 1) $\begin{pmatrix} 0{,}72 & 3{,}54 & 7{,}28 & 0{,}33 \\ -0{,}28 & -0{,}72 & 3{,}04 & 0{,}22 \\ 1{,}00 & 0{,}35 & -0{,}78 & 1{,}00 \\ 7{,}03 & -5{,}04 & -3{,}75 & 3{,}41 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}52 & 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}84 \\ 0{,}42 & 0{,}56 & 0{,}83 & -0{,}73 \\ 0{,}36 & 0{,}83 & -0{,}13 & 0{,}28 \\ 0{,}84 & 0{,}24 & -0{,}38 & 0{,}49 \end{vmatrix}$.

Образец выполнения задания

1) $A=\begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}52 & -0{,}42 & 0{,}23 \\ 0{,}44 & -0{,}25 & 0{,}36 & -0{,}51 \\ -1{,}06 & 0{,}74 & -0{,}83 & 0{,}48 \\ 0{,}96 & 0{,}82 & 0{,}55 & 0{,}36 \end{pmatrix}$; 2) $\Delta=\begin{vmatrix} 0{,}32 & 0{,}54 & 0{,}67 & -0{,}82 \\ 0{,}84 & 0{,}88 & -0{,}35 & 0{,}71 \\ 1{,}02 & 0{,}32 & 0{,}48 & 0{,}57 \\ -0{,}18 & 0{,}64 & -0{,}24 & 0{,}43 \end{vmatrix}$.

---

1) Вычисление обратной матрицы производим в следующей таблице:

Элементы данной матрицы				Элементы единичной матрицы				Контрольные суммы	Строчные суммы
j_1	j_2	j_3	j_4	j_1	j_2	j_3	j_4	$\sum$	$\sum'$
0,32	0,52	−0,42	0,23	1	0	0	0	1,65	1,65
0,44	−0,25	0,36	−0,51	0	1	0	0	1,04	1,04
−1,06	0,74	−0,83	0,48	0	0	1	0	0,33	0,33
0,96	0,82	0,55	0,36	0	0	0	1	3,69	3,69
1	1,625	−1,3125	0,7188	3,125	0	0	0	5,1562	5,1562
	−0,965	0,9375	−0,8262	−1,375	1	0	0	−1,2288	−1,2287
	2,4625	−2,2212	1,2419	3,3125	0	1	0	5,7956	5,7956
	−0,74	1,81	−0,33	3,000	0	0	1	−1,26	−1,26
	1	−0,9715	0,8562	1,4249	−1,0363	0	0	1,2733	1,2733
		0,1711	−0,8666	−0,1962	2,5518	1	0	2,6601	2,6601
		1,0911	0,3036	−1,9456	−0,7668	0	1	−0,3177	−0,3177
			5,8306	−0,6940	−17,0425	−6,3781	1	−17,2837	−17,284
			1	−0,1190	−2,9229	−1,0939	0,1715	−2,9643	−2,9643
			1	−0,1190	−2,9229	−1,0939	0,1715	−2,9643	
		1		−1,7500	0,1105	0,3044	0,8688	0,5336	
	1			−0,1734	1,5737	1,2323	0,6972	4,3298	
1				1,1954	−0,3114	−0,8168	−0,1159	0,9512	

Ответ:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1,1954 & -0,3114 & -0,8168 & -0,1159 \\ -0,1734 & 1,5737 & 1,2323 & 0,6972 \\ -1,7500 & 0,1105 & 0,3044 & 0,8688 \\ -0,1190 & -2,9229 & -1,0939 & 0,1715 \end{pmatrix}$$

2) Вычисление определителя производим в таблице:

Элементы определителя				Контрольные суммы $\sum$
$\boxed{0,32}$	0,54	0,67	−0,82	0,71
0,84	0,88	−0,35	0,71	2,08
1,02	0,32	0,48	0,57	2,39
−0,18	0,64	−0,24	0,43	0,65
1	1,6875	2,09375	−2,5625	2,21875
	$\boxed{-0,5375}$	−2,10875	2,8625	0,21625
	−1,40125	−1,65562	3,18375	0,12688
	0,94375	0,13688	−0,03125	1,04938
	1	3,92326	−5,32558	−0,40232
		$\boxed{3,84184}$	−4,27872	−0,43687
		−3,56570	4,99477	1,42907
		1	−1,11372	−0,11371
			$\boxed{1,02358}$	1,0236
0,32	−0,5375	3,84184	1,02358	

$$\Delta = 0,32 \cdot (-0,5375) \cdot 3,84184 \cdot 1,02358 = -0,676378.$$

Ответ: $\Delta \approx -0,6764$.

Работа 4

Задание. Решить систему линейных уравнений методом главных элементов с точностью до 0,001.

№ 1. $\begin{cases} 0,34x_1 + 0,71x_2 + 0,63x_3 = 2,08; \\ 0,71x_1 - 0,65x_2 - 0,18x_3 = 0,17; \\ 1,17x_1 - 2,35x_2 + 0,75x_3 = 1,28. \end{cases}$

№ 2. $\begin{cases} 3,75x_1 - 0,28x_2 + 0,17x_3 = 0,75; \\ 2,11x_1 - 0,11x_2 - 0,12x_3 = 1,11; \\ 0,22x_1 - 3,17x_2 + 1,81x_3 = 0,05. \end{cases}$

№ 3. $\begin{cases} 0,21x_1 - 0,18x_2 + 0,75x_3 = 0,11; \\ 0,13x_1 + 0,75x_2 - 0,11x_3 = 2,00; \\ 3,01x_1 - 0,33x_2 + 0,11x_3 = 0,13. \end{cases}$

№ 4. $\begin{cases} 0,13x_1 - 0,14x_2 - 2,00x_3 = 0,15; \\ 0,75x_1 + 0,18x_2 - 0,77x_3 = 0,11; \\ 0,28x_1 - 0,17x_2 + 0,39x_3 = 0,12. \end{cases}$

№ 5. $\begin{cases} 3,01x_1 - 0,14x_2 - 0,15x_3 = 1,00; \\ 1,11x_1 + 0,13x_2 - 0,75x_3 = 0,13; \\ 0,17x_1 - 2,11x_2 + 0,71x_3 = 0,17. \end{cases}$

№ 6. $\begin{cases} 0,92x_1 - 0,83x_2 + 0,62x_3 = 2,15; \\ 0,24x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 = 0,62; \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 - 0,67x_3 = 0,88. \end{cases}$

№ 7. $\begin{cases} 1{,}24x_1 - 0{,}87x_2 - 3{,}17x_3 = 0{,}46; \\ 2{,}11x_1 - 0{,}45x_2 + 1{,}44x_3 = 1{,}50; \\ 0{,}48x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}63x_3 = 0{,}35. \end{cases}$

№ 8. $\begin{cases} 0{,}64x_1 - 0{,}83x_2 + 4{,}2x_3 = 2{,}23; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}43x_3 = 1{,}71; \\ 0{,}86x_1 + 0{,}77x_2 + 0{,}88x_3 = -0{,}54. \end{cases}$

№ 9. $\begin{cases} 0{,}32x_1 - 0{,}42x_2 + 0{,}85x_3 = 1{,}32; \\ 0{,}63x_1 - 1{,}43x_2 - 0{,}58x_3 = -0{,}44; \\ 0{,}84x_1 - 2{,}23x_2 - 0{,}52x_3 = 0{,}64. \end{cases}$

№ 10. $\begin{cases} 0{,}73x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}38x_3 = 0{,}58; \\ 1{,}25x_1 + 0{,}66x_2 - 0{,}78x_3 = 0{,}66; \\ 0{,}75x_1 + 1{,}22x_2 - 0{,}83x_3 = 0{,}92. \end{cases}$

№ 11. $\begin{cases} 0{,}62x_1 - 0{,}44x_2 - 0{,}86x_3 = 0{,}68; \\ 0{,}83x_1 + 0{,}42x_2 - 0{,}56x_3 = 1{,}24; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}37x_2 - 0{,}62x_3 = 0{,}87. \end{cases}$

№ 12. $\begin{cases} 1{,}26x_1 - 2{,}34x_2 + 1{,}17x_3 = 3{,}14; \\ 0{,}75x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}48x_3 = -1{,}17; \\ 3{,}44x_1 - 1{,}85x_2 + 1{,}16x_3 = 1{,}83. \end{cases}$

№ 13. $\begin{cases} 0{,}46x_1 + 1{,}72x_2 + 2{,}53x_3 = 2{,}44; \\ 1{,}53x_1 - 2{,}32x_2 - 1{,}83x_3 = 2{,}83; \\ 0{,}75x_1 + 0{,}86x_2 + 3{,}72x_3 = 1{,}06. \end{cases}$

№ 14. $\begin{cases} 2{,}47x_1 + 0{,}65x_2 - 1{,}88x_3 = 1{,}24; \\ 1{,}34x_1 + 1{,}17x_2 + 2{,}54x_3 = 2{,}35; \\ 0{,}86x_1 - 1{,}73x_2 - 1{,}08x_3 = 3{,}15. \end{cases}$

№ 15. $\begin{cases} 4{,}24x_1 + 2{,}73x_2 - 1{,}55x_3 = 1{,}87; \\ 2{,}34x_1 + 1{,}27x_2 + 3{,}15x_3 = 2{,}16; \\ 3{,}05x_1 - 1{,}05x_2 - 0{,}63x_3 = -1{,}25. \end{cases}$

№ 16. $\begin{cases} 0{,}43x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}58x_3 = 2{,}71; \\ 0{,}74x_1 + 0{,}83x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}26; \\ 1{,}43x_1 - 1{,}58x_2 + 0{,}83x_3 = 1{,}03. \end{cases}$

№ 17. $\begin{cases} 0{,}43x_1 + 0{,}63x_2 + 1{,}44x_3 = 2{,}18; \\ 1{,}64x_1 - 0{,}83x_2 - 2{,}45x_3 = 1{,}84; \\ 0{,}58x_1 + 1{,}55x_2 + 3{,}18x_3 = 0{,}74. \end{cases}$

№ 18. $\begin{cases} 1{,}24x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}95x_3 = 1{,}43; \\ 2{,}15x_1 - 1{,}18x_2 + 0{,}57x_3 = 2{,}43; \\ 1{,}72x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}57x_3 = 3{,}88. \end{cases}$

№ 19. $\begin{cases} 0{,}62x_1 + 0{,}56x_2 - 0{,}43x_3 = 1{,}16; \\ 1{,}32x_1 - 0{,}88x_2 + 1{,}76x_3 = 2{,}07; \\ 0{,}73x_1 + 1{,}42x_2 - 0{,}34x_3 = 2{,}18. \end{cases}$

№ 20. $\begin{cases} 1{,}06x_1 + 0{,}34x_2 + 1{,}26x_3 = 1{,}17; \\ 2{,}54x_1 - 1{,}16x_2 + 0{,}55x_3 = 2{,}23; \\ 1{,}34x_1 - 0{,}47x_2 - 0{,}83x_3 = 3{,}26. \end{cases}$

№ 21. $\begin{cases} 3{,}15x_1 - 1{,}72x_2 - 1{,}23x_3 = 2{,}15; \\ 0{,}72x_1 + 0{,}67x_2 + 1{,}18x_3 = 1{,}43; \\ 2{,}57x_1 - 1{,}34x_2 - 0{,}68x_3 = 1{,}03. \end{cases}$

№ 22. $\begin{cases} 1{,}73x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}82x_3 = 0{,}36; \\ 0{,}27x_1 + 0{,}53x_2 - 0{,}64x_3 = 1{,}23; \\ 0{,}56x_1 - 0{,}48x_2 + 1{,}95x_3 = -0{,}76. \end{cases}$

№ 23. $\begin{cases} 0{,}95x_1 + 0{,}72x_2 - 1{,}14x_3 = 2{,}15; \\ 0{,}63x_1 + 0{,}24x_2 + 0{,}38x_3 = 0{,}74; \\ 1{,}23x_1 - 1{,}08x_2 - 1{,}16x_3 = 0{,}97. \end{cases}$

№ 24. $\begin{cases} 2{,}18x_1 + 1{,}72x_2 - 0{,}93x_3 = 1{,}06; \\ 1{,}42x_1 + 0{,}18x_2 + 1{,}12x_3 = 2{,}07; \\ 0{,}92x_1 - 1{,}14x_2 - 2{,}53x_3 = -0{,}45. \end{cases}$

№ 25. $\begin{cases} 2{,}23x_1 - 0{,}73x_2 + 1{,}27x_3 = 2{,}43; \\ 2{,}15x_1 + 3{,}17x_2 - 1{,}43x_3 = -0{,}73; \\ 0{,}83x_1 + 0{,}72x_2 + 2{,}12x_3 = 1{,}42. \end{cases}$

№ 26. $\begin{cases} 0{,}65x_1 - 0{,}93x_2 + 0{,}45x_3 = -0{,}72; \\ 1{,}15x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}72x_3 = 1{,}24; \\ 0{,}56x_1 - 0{,}18x_2 + 1{,}03x_3 = 2{,}15. \end{cases}$

№ 27. $\begin{cases} 1{,}16x_1 - 0{,}28x_2 + 2{,}16x_3 = 1{,}16; \\ 0{,}65x_1 + 0{,}76x_2 - 1{,}18x_3 = 0{,}28; \\ 0{,}53x_1 + 1{,}07x_2 - 0{,}63x_3 = 1{,}27. \end{cases}$

№ 28. $\begin{cases} 2{,}16x_1 - 2{,}83x_2 + 1{,}15x_3 = 2{,}32; \\ 1{,}71x_1 + 2{,}17x_2 - 0{,}83x_3 = 1{,}25; \\ 0{,}35x_1 - 0{,}72x_2 + 1{,}03x_3 = 0{,}82. \end{cases}$

№ 29. $\begin{cases} 1{,}02x_1 + 0{,}72x_2 - 0{,}65x_3 = 1{,}27; \\ 0{,}74x_1 - 1{,}24x_2 - 1{,}73x_3 = 0{,}77; \\ 1{,}78x_1 + 2{,}32x_2 + 0{,}74x_3 = 1{,}16. \end{cases}$

№ 30. $\begin{cases} 1{,}53x_1 - 1{,}63x_2 - 0{,}76x_3 = 2{,}18; \\ 0{,}86x_1 + 1{,}17x_2 + 1{,}84x_3 = 1{,}95; \\ 0{,}32x_1 - 0{,}65x_2 + 1{,}11x_3 = -0{,}47. \end{cases}$

Образец выполнения задания

$$\begin{cases} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 3{,}17x_3 = 2{,}18; \\ 1{,}12x_1 + 0{,}83x_2 - 2{,}16x_3 = -1{,}15; \\ 0{,}18x_1 + 1{,}27x_2 + 0{,}76x_3 = 3{,}23. \end{cases}$$

Вычисления производим по следующей схеме:

m_i	Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	Σ	Σ′
	x_1	x_2	x_3			
−1	2,74	−1,18	$\boxed{3,17}$	2,18	6,91	6,91
0,6814	1,12	0,83	−2,16	−1,15	−1,36	−1,36
−0,2397	0,18	1,27	0,76	3,23	5,44	5,44
−1	$\boxed{2,9870}$	0,0259	—	0,3355	3,3485	3,3484
0,1596	−0,4768	1,5528	—	2,7075	3,7837	3,7835
—	—	$\boxed{1,5569}$	—	2,7601	4,3181	4,3170
	0,0970	1,7728	1,2638			
	1,0970	2,7735	2,2638			

$$x_2=\frac{2,7602}{1,5569}=1,7728;\quad \bar{x}_2=\frac{4,3181}{1,5569}=2,7735;$$

$$x_1=\frac{0,3355-0,0259\cdot 1,7728}{2,9870}=0,0970;\quad \bar{x}_1=\frac{3,3485-0,0259\cdot 2,7735}{2,9870}=1,0970;$$

$$x_3=\frac{2,18-2,74\cdot 0,0970+1,18\cdot 1,7728}{3,17}=1,2638;$$

$$\bar{x}_3=\frac{6,91-2,74\cdot 1,0970+1,18\cdot 2,7735}{3,17}=2,2638.$$

Ответ: $x_1\approx 0,097$; $x_2\approx 1,773$; $x_3\approx 1,264$.

Работа 5

Задание. Решить систему линейных уравнений методом квадратных корней с точностью до 0,001.

№ 1.
$$\begin{cases} 3,14x_1-2,12x_2+1,17x_3=1,27; \\ -2,12x_1+1,32x_2-2,45x_3=2,13; \\ 1,17x_1-2,45x_2+1,18x_3=3,14. \end{cases}$$

№ 2.
$$\begin{cases} 2,45x_1+1,75x_2-3,24x_3=1,23; \\ 1,75x_1-1,16x_2+2,18x_3=3,43; \\ -3,24x_1+2,18x_2-1,85x_3=-0,16. \end{cases}$$

№ 3.
$$\begin{cases} 1,65x_1-2,27x_2+0,18x_3=2,25; \\ -2,27x_1+1,73x_2-0,46x_3=0,93; \\ 0,18x_1-0,46x_2+2,16x_3=1,33. \end{cases}$$

№ 4.
$$\begin{cases} 3,23x_1+1,62x_2+0,65x_3=1,28; \\ 1,62x_1-2,33x_2-1,43x_3=0,87; \\ 0,65x_1-1,43x_2+2,18x_3=-2,87. \end{cases}$$

№ 5.
$$\begin{cases} 0,93x_1+1,42x_2-2,55x_3=2,48; \\ 1,42x_1-2,87x_2+2,36x_3=-0,75; \\ -2,55x_1+2,36x_2-1,44x_3=1,83. \end{cases}$$

№ 6.
$$\begin{cases} 1,42x_1-2,15x_2+1,07x_3=2,48; \\ -2,15x_1+0,76x_2-2,18x_3=1,15; \\ 1,07x_1-2,18x_2+1,23x_3=0,88. \end{cases}$$

№ 7.
$$\begin{cases} 2{,}23x_1-0{,}71x_2+0{,}63x_3=1{,}28; \\ -0{,}71x_1+1{,}45x_2-1{,}34x_3=0{,}64; \\ 0{,}63x_1-1{,}34x_2+0{,}77x_3=-0{,}87. \end{cases}$$

№ 8.
$$\begin{cases} 1{,}63x_1+1{,}27x_2-0{,}84x_3=1{,}51; \\ 1{,}27x_1+0{,}65x_2+1{,}27x_3=-0{,}63; \\ -0{,}84x_1+1{,}27x_2-1{,}21x_3=2{,}15. \end{cases}$$

№ 9.
$$\begin{cases} 0{,}78x_1+1{,}08x_2-1{,}35x_3=0{,}57; \\ 1{,}08x_1-1{,}28x_2+0{,}37x_3=1{,}27; \\ -1{,}35x_1+0{,}37x_2+2{,}86x_3=0{,}47. \end{cases}$$

№ 10.
$$\begin{cases} 0{,}83x_1+2{,}18x_2-1{,}73x_3=0{,}28; \\ 2{,}18x_1-1{,}41x_2+1{,}03x_3=-1{,}18; \\ -1{,}73x_1+1{,}03x_2+2{,}27x_3=0{,}72. \end{cases}$$

№ 11.
$$\begin{cases} 2{,}74x_1-1{,}18x_2+1{,}23x_3=0{,}16; \\ -1{,}18x_1+1{,}71x_2-0{,}52x_3=1{,}81; \\ 1{,}23x_1-0{,}52x_2+0{,}62x_3=-1{,}25. \end{cases}$$

№ 12.
$$\begin{cases} 1{,}35x_1-0{,}72x_2+1{,}38x_3=0{,}88; \\ -0{,}72x_1+1{,}45x_2-2{,}18x_3=1{,}72; \\ 1{,}38x_1-2{,}18x_2+0{,}93x_3=-0{,}72. \end{cases}$$

№ 13.
$$\begin{cases} 1{,}48x_1+0{,}75x_2-1{,}23x_3=0{,}83; \\ 0{,}75x_1-0{,}96x_2+1{,}64x_3=-1{,}12; \\ -1{,}23x_1+1{,}64x_2-0{,}55x_3=0{,}47. \end{cases}$$

№ 14.
$$\begin{cases} 2{,}16x_1-3{,}18x_2+1{,}26x_3=1{,}83; \\ -3{,}18x_1+0{,}63x_2-2{,}73x_3=0{,}54; \\ 1{,}26x_1-2{,}73x_2+3{,}15x_3=1{,}72. \end{cases}$$

№ 15.
$$\begin{cases} 0{,}63x_1-1{,}72x_2+3{,}37x_3=-0{,}75; \\ -1{,}72x_1-2{,}27x_2+1{,}62x_3=1{,}27; \\ 3{,}27x_1+1{,}62x_2-0{,}43x_3=2{,}74. \end{cases}$$

№ 16.
$$\begin{cases} 1{,}36x_1+0{,}92x_2-1{,}87x_3=2{,}15; \\ 0{,}92x_1-2{,}24x_2+0{,}77x_3=-2{,}06; \\ -1{,}87x_1+0{,}77x_2-1{,}16x_3=0{,}17. \end{cases}$$

№ 17.
$$\begin{cases} 2{,}32x_1+1{,}17x_2-0{,}28x_3=1{,}43; \\ 1{,}17x_1-1{,}43x_2+0{,}88x_3=-0{,}47; \\ -0{,}28x_1+0{,}88x_2-1{,}45x_3=1{,}09. \end{cases}$$

№ 18.
$$\begin{cases} 0{,}75x_1-1{,}24x_2+1{,}56x_3=0{,}49; \\ -1{,}24x_1+0{,}18x_2-1{,}72x_3=-0{,}57; \\ 1{,}56x_1-1{,}72x_2+0{,}79x_3=1{,}03. \end{cases}$$

№ 19.
$$\begin{cases} 1{,}18x_1+2{,}32x_2-0{,}67x_3=1{,}83; \\ 2{,}32x_1+1{,}87x_2+1{,}35x_3=-0{,}73; \\ -0{,}67x_1+1{,}35x_2-0{,}88x_3=0{,}68. \end{cases}$$

№ 20.
$$\begin{cases} 0{,}78x_1+1{,}13x_2+1{,}87x_3=0{,}83; \\ 1{,}13x_1-0{,}68x_2+2{,}16x_3=-0{,}27; \\ 1{,}87x_1+2{,}16x_2-2{,}63x_3=1{,}37. \end{cases}$$

№ 21.
$$\begin{cases} 1{,}17x_1-0{,}65x_2+1{,}54x_3=-1{,}43; \\ -0{,}65x_1+1{,}16x_2-1{,}73x_3=0{,}68; \\ 1{,}54x_1-1{,}73x_2+2{,}15x_3=1{,}87. \end{cases}$$

№ 22.
$$\begin{cases} 0{,}87x_1+1{,}35x_2-0{,}44x_3=1{,}51; \\ 1{,}35x_1-1{,}22x_2+2{,}32x_3=0{,}71; \\ -0{,}44x_1+2{,}32x_2-3{,}73x_3=0{,}53. \end{cases}$$

№ 23.
$$\begin{cases} 1{,}17x_1+2{,}23x_2-0{,}77x_3=1{,}11; \\ 2{,}23x_1-0{,}81x_2+1{,}72x_3=1{,}88; \\ -0{,}77x_1+1{,}72x_2-0{,}65x_3=0{,}57. \end{cases}$$

№ 24.
$$\begin{cases} 2{,}16x_1+1{,}45x_2-0{,}89x_3=0{,}61; \\ 1{,}45x_1-2{,}44x_2+1{,}18x_3=1{,}05; \\ -0{,}89x_1+1{,}18x_2-2{,}07x_3=-0{,}83. \end{cases}$$

№ 25.
$$\begin{cases} 0{,}64x_1+1{,}05x_2-2{,}93x_3=1{,}18; \\ 1{,}05x_1-1{,}41x_2+0{,}16x_3=-0{,}27; \\ -2{,}93x_1+0{,}16x_2-1{,}51x_3=0{,}72. \end{cases}$$

№ 26.
$$\begin{cases} 1{,}54x_1-0{,}75x_2+1{,}36x_3=2{,}45; \\ -0{,}75x_1+0{,}87x_2-0{,}79x_3=1{,}07; \\ 1{,}36x_1-0{,}79x_2+0{,}64x_3=0{,}54. \end{cases}$$

№ 27.
$$\begin{cases} 2{,}44x_1-1{,}16x_2+0{,}83x_3=0{,}65; \\ -1{,}16x_1-3{,}45x_2+0{,}57x_3=1{,}88; \\ 0{,}83x_1+0{,}57x_2-1{,}71x_3=0{,}74. \end{cases}$$

№ 28.
$$\begin{cases} 2{,}56x_1+0{,}67x_2-1{,}78x_3=1{,}14; \\ 0{,}67x_1-2{,}67x_2+1{,}35x_3=0{,}66; \\ -1{,}78x_1+1{,}35x_2-0{,}55x_3=1{,}72. \end{cases}$$

№ 29.
$$\begin{cases} 0{,}53x_1-0{,}75x_2+1{,}83x_3=0{,}68; \\ -0{,}75x_1+0{,}68x_2-1{,}19x_3=0{,}95; \\ 1{,}83x_1-1{,}19x_2+2{,}15x_3=1{,}27. \end{cases}$$

№ 30.
$$\begin{cases} 1{,}65x_1-1{,}76x_2+0{,}77x_3=2{,}15; \\ -1{,}76x_1+1{,}04x_2-2{,}61x_3=0{,}82; \\ 0{,}77x_1-2{,}61x_2-3{,}18x_3=-0{,}73. \end{cases}$$

Образец выполнения задания

$$\begin{cases} 4{,}25x_1 - 1{,}48x_2 + 0{,}73x_2 = 1{,}44; \\ -1{,}48x_1 + 1{,}73x_2 - 1{,}85x_3 = 2{,}73; \\ 0{,}73x_1 - 1{,}85x_2 + 1{,}93x_3 = -0{,}64. \end{cases}$$

Вычисления производим по следующей схеме:

Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	Σ	Σ'
x_1	x_2	x_3			
4,25 −1,48 0,73	−1,48 1,73 −1,85	0,73 −1,85 1,93	1,44 2,73 −0,64	4,94 1,13 0,17	4,94 1,13 0,17
2,0616	−0,7179 1,1021	0,3541 −1,4480 $0{,}5405i$	0,6985 2,9323 $-6{,}2141i$	2,3962 2,5862 $-5{,}6731i$	2,3963 2,5864 $-5{,}6736i$
−2,0200	−12,4446	−11,4969			
−1,0199	−11,4436	−10,4960			

$$x_3 = -\frac{6{,}2141i}{0{,}5405i} = -11{,}4969; \quad \bar{x}_3 = -\frac{5{,}6731i}{0{,}5405i} = -10{,}4960;$$

$$x_2 = \frac{2{,}9323 - 1{,}4480 \cdot 11{,}4969}{1{,}1021} = -12{,}4446;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2{,}5862 - 1{,}4480 \cdot 10{,}4960}{1{,}1021} = -11{,}4436;$$

$$x_1 = \frac{0{,}6985 + 0{,}3541 \cdot 11{,}4469 - 0{,}7179 \cdot 12{,}4446}{2{,}0616} = -2{,}0200;$$

$$\bar{x}_1 = \frac{2{,}3962 + 0{,}3541 \cdot 10{,}4960 - 0{,}7179 \cdot 11{,}4436}{2{,}0616} = -1{,}0199.$$

Ответ: $x_1 \approx -2{,}020$; $x_2 \approx -12{,}445$; $x_3 \approx -11{,}497$.

Работа 6

Задание. Решить систему уравнений по схеме Халецкого с точностью до 0,0001.

№ 1. $\begin{cases} 0{,}63x_1 + 1{,}00x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}34x_4 = 2{,}08; \\ 1{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}65x_3 + 0{,}71x_4 = 0{,}17; \\ 2{,}71x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}17x_3 - 2{,}35x_4 = 1{,}28; \\ 3{,}58x_1 + 0{,}21x_2 - 3{,}45x_3 - 1{,}18x_4 = 0{,}05. \end{cases}$

№ 2. $\begin{cases} 3{,}51x_1+0{,}17x_2+3{,}75x_3-0{,}28x_4=0{,}75; \\ 4{,}52x_1+2{,}11x_2-0{,}11x_3-0{,}12x_4=1{,}11; \\ -2{,}11x_1+3{,}17x_2+0{,}12x_3-0{,}15x_4=0{,}21; \\ 3{,}17x_1+1{,}81x_2-3{,}17x_3+0{,}22x_4=0{,}05. \end{cases}$

№ 3. $\begin{cases} 0{,}17x_1+0{,}75x_2-0{,}18x_3+0{,}21x_4=0{,}11; \\ 0{,}75x_1+0{,}13x_2+0{,}11x_3+1{,}00x_4=2{,}00; \\ -0{,}33x_1+0{,}11x_2+3{,}01x_3-2{,}01x_4=0{,}11; \\ 0{,}11x_1+1{,}12x_2+1{,}11x_3-1{,}31x_4=0{,}13. \end{cases}$

№ 4. $\begin{cases} -1{,}00x_1+0{,}13x_2-2{,}00x_3-0{,}14x_4=0{,}15; \\ 0{,}75x_1+0{,}18x_2-0{,}21x_3-0{,}77x_4=0{,}11; \\ 0{,}28x_1-0{,}17x_2+0{,}39x_3+0{,}48x_4=0{,}12; \\ 1{,}00x_1+3{,}14x_2-0{,}21x_3-1{,}00x_4=-0{,}11. \end{cases}$

№ 5. $\begin{cases} 3{,}01x_1-0{,}14x_2+1{,}00x_3-0{,}15x_4=1{,}00; \\ -1{,}75x_1+1{,}11x_2+0{,}13x_3-0{,}75x_4=0{,}13; \\ 0{,}17x_1-2{,}11x_2+0{,}71x_3-1{,}71x_4=1{,}00; \\ 0{,}21x_1+0{,}21x_2+0{,}35x_3+0{,}33x_4=0{,}17. \end{cases}$

№ 6. $\begin{cases} 1{,}15x_1+0{,}62x_2-0{,}83x_3+0{,}92x_4=2{,}15; \\ 0{,}82x_1-0{,}54x_2+0{,}43x_3-0{,}25x_4=0{,}62; \\ 0{,}24x_1+1{,}15x_2-0{,}33x_3+1{,}42x_4=-0{,}62; \\ 0{,}73x_1-0{,}81x_2+1{,}27x_3-0{,}67x_4=0{,}88. \end{cases}$

№ 7. $\begin{cases} 2{,}2\ x_1-3{,}17x_2+1{,}24x_3-0{,}87x_4=0{,}46; \\ 1{,}5\ x_1+2{,}11x_2-0{,}45x_3+1{,}44x_4=1{,}50; \\ 0{,}86x_1-1{,}44x_2+0{,}62x_3+0{,}28x_4=-0{,}12; \\ 0{,}48x_1+1{,}25x_2-0{,}63x_3-0{,}97x_4=0{,}35. \end{cases}$

№ 8. $\begin{cases} 0{,}64x_1+0{,}72x_2-0{,}83x_3+4{,}2\ x_4=2{,}23; \\ 0{,}58x_1-0{,}83x_2+1{,}43x_3-0{,}62x_4=1{,}71; \\ 0{,}86x_1+0{,}77x_2-1{,}83x_3+0{,}88x_4=-0{,}54; \\ 1{,}32x_1-0{,}52x_2-0{,}65x_3+1{,}22x_4=0{,}65. \end{cases}$

№ 9. $\begin{cases} 1{,}42x_1+0{,}32x_2-0{,}42x_3+0{,}85x_4=1{,}32; \\ 0{,}63x_1-0{,}43x_2+1{,}27x_3-0{,}58x_4=-0{,}44; \\ 0{,}84x_1-2{,}23x_2-0{,}52x_3+0{,}47x_4=0{,}64; \\ 0{,}27x_1+1{,}37x_2+0{,}64x_3-1{,}27x_4=0{,}85. \end{cases}$

№ 10. $\begin{cases} 0{,}73x_1+1{,}24x_2-0{,}38x_3-1{,}43x_4=0{,}58; \\ 1{,}07x_1-0{,}77x_2+1{,}25x_3+0{,}66x_4=-0{,}66; \\ 1{,}56x_1+0{,}66x_2+1{,}44x_3-0{,}87x_4=1{,}24; \\ 0{,}75x_1+1{,}22x_2-0{,}83x_3+0{,}37x_4=0{,}92. \end{cases}$

№ 11. $\begin{cases} 1{,}32x_1-0{,}83x_2-0{,}44x_3+0{,}62x_4=0{,}68; \\ 0{,}83x_1+0{,}42x_2-0{,}56x_3+0{,}77x_4=1{,}24; \\ 0{,}58x_1-0{,}37x_2+1{,}24x_3-0{,}62x_4=0{,}87; \\ 0{,}35x_1+0{,}66x_2-1{,}38x_3-0{,}93x_4=-1{,}08. \end{cases}$

№ 12. $\begin{cases} 0{,}11x_1-0{,}17x_2+0{,}72x_3-0{,}34x_4=0{,}17; \\ 0{,}81x_1+0{,}12x_2-0{,}91x_3+0{,}17x_4=1{,}00; \\ 0{,}17x_1-0{,}18x_2+1{,}00x_3+0{,}23x_4=0{,}21; \\ 0{,}13x_1+0{,}17x_2-0{,}99x_3+0{,}35x_4=2{,}71. \end{cases}$

№ 13. $\begin{cases} 0{,}18x_1+2{,}11x_2+0{,}13x_3-0{,}22x_4=0{,}22; \\ 0{,}33x_1-0{,}22x_2-1{,}00x_3+0{,}17x_4=0{,}11; \\ -1{,}00x_1+0{,}11x_2+2{,}00x_3-0{,}45x_4=1{,}00; \\ 7{,}00x_1-0{,}17x_2-0{,}22x_3+0{,}33x_4=0{,}21. \end{cases}$

№ 14. $\begin{cases} 2{,}00x_1+0{,}05x_2-3{,}01x_3-0{,}11x_4=0{,}21; \\ 1{,}00x_1-2{,}00x_2+3{,}02x_3+0{,}05x_4=0{,}18; \\ 0{,}17x_1+0{,}99x_2-2{,}00x_3-0{,}17x_4=0{,}17; \\ 0{,}33x_1-0{,}07x_2+0{,}33x_3+2{,}00x_4=0{,}17. \end{cases}$

№ 15. $\begin{cases} 0{,}17x_1-0{,}13x_2-0{,}11x_3-0{,}12x_4=0{,}22; \\ 1{,}00x_1-1{,}00x_2-0{,}13x_3+0{,}13x_4=0{,}11; \\ 0{,}35x_1+0{,}33x_2+0{,}12x_3+0{,}13x_4=0{,}12; \\ 0{,}13x_1+0{,}11x_2-0{,}13x_3-0{,}11x_4=1{,}00. \end{cases}$

№ 16. $\begin{cases} 0{,}11x_1+1{,}13x_2-0{,}17x_3+0{,}18x_4=1{,}00; \\ 0{,}13x_1-1{,}17x_2+0{,}18x_3+0{,}14x_4=0{,}13; \\ 0{,}11x_1-1{,}05x_2-0{,}17x_3-0{,}15x_4=0{,}11; \\ 0{,}15x_1-0{,}05x_2+0{,}18x_3-0{,}11x_4=1{,}00. \end{cases}$

№ 17. $\begin{cases} 1{,}00x_1-0{,}17x_2+0{,}11x_3-0{,}15x_4=0{,}17; \\ 0{,}14x_1+0{,}21x_2-0{,}33x_3+0{,}11x_4=1{,}00; \\ 0{,}22x_1+3{,}44x_2-0{,}11x_3+0{,}12x_4=2{,}00; \\ 0{,}11x_1+0{,}13x_2+0{,}12x_3+0{,}14x_4=0{,}13. \end{cases}$

№ 18. $\begin{cases} 1{,}00x_1+0{,}55x_2-0{,}13x_3+0{,}34x_4=0{,}13; \\ 0{,}13x_1-0{,}17x_2+0{,}33x_3+0{,}17x_4=0{,}11; \\ 0{,}11x_1+0{,}18x_2-0{,}22x_3-0{,}11x_4=1{,}00; \\ 0{,}13x_1-0{,}12x_2+0{,}21x_3+0{,}22x_4=0{,}18. \end{cases}$

№ 19. $\begin{cases} 1{,}00x_1-0{,}51x_2+0{,}12x_3+0{,}55x_4=0{,}12; \\ 0{,}12x_1+0{,}18x_2-0{,}22x_3-0{,}41x_4=0{,}13; \\ 0{,}22x_1-3{,}01x_2+0{,}31x_3+0{,}58x_4=1{,}00; \\ 1{,}00x_1+0{,}24x_2-3{,}05x_3-0{,}22x_4=3{,}41. \end{cases}$

№ 20. $\begin{cases} 0{,}13x_1+0{,}22x_2-0{,}14x_3+0{,}15x_4=1{,}00; \\ 0{,}22x_1-0{,}31x_2+0{,}42x_3-5{,}1\ x_4=6{,}01; \\ 0{,}62x_1-0{,}74x_2+0{,}85x_3-0{,}96x_4=0{,}11; \\ 0{,}12x_1+0{,}13x_2+0{,}14x_3+0{,}45x_4=0{,}16. \end{cases}$

№ 21. $\begin{cases} 0{,}18x_1+0{,}19x_2+0{,}20x_3-0{,}21x_4=0{,}22; \\ 0{,}51x_1-0{,}50x_2+0{,}49x_3-0{,}48x_4=0{,}47; \\ 0{,}61x_1+0{,}62x_2-0{,}63x_3+0{,}64x_4=0{,}65; \\ 0{,}11x_1-0{,}15x_2+0{,}22x_3-0{,}38x_4=0{,}42. \end{cases}$

№ 22. $\begin{cases} 0{,}17x_1-0{,}18x_2+0{,}19x_3-5{,}74x_4=1{,}00; \\ 0{,}11x_1-0{,}43x_2+0{,}15x_3-0{,}17x_4=1{,}9; \\ 0{,}12x_1+0{,}14x_2+0{,}16x_3+0{,}18x_4=2{,}00; \\ 0{,}71x_1-0{,}13x_2-0{,}41x_3+0{,}52x_4=1{,}00. \end{cases}$

№ 23. $\begin{cases} 1{,}00x_1-2{,}01x_2+2{,}04x_3+0{,}17x_4=0{,}18; \\ 0{,}33x_1-0{,}77x_2+0{,}44x_3-0{,}51x_4=0{,}19; \\ 0{,}31x_1+0{,}17x_2-0{,}21x_3+0{,}54x_4=0{,}21; \\ 0{,}17x_1+1{,}00x_2-0{,}13x_3+0{,}21x_4=0{,}31. \end{cases}$

№ 24. $\begin{cases} 2{,}34x_1-1{,}42x_2-0{,}54x_3+0{,}21x_4=0{,}66; \\ 1{,}44x_1-0{,}53x_2+1{,}43x_3-1{,}27x_4=-1{,}44; \\ 0{,}63x_1-1{,}32x_2-0{,}65x_3+1{,}43x_4=0{,}94; \\ 0{,}56x_1+0{,}88x_2-0{,}67x_3-2{,}38x_4=0{,}73. \end{cases}$

№ 25. $\begin{cases} 0{,}63x_1-0{,}76x_2+1{,}34x_3+0{,}37x_4=1{,}21; \\ 0{,}54x_1+0{,}83x_2-0{,}74x_3-1{,}27x_4=0{,}86; \\ 0{,}24x_1-0{,}44x_2+0{,}35x_3+0{,}55x_4=0{,}25; \\ 0{,}43x_1-1{,}21x_2+2{,}32x_3-1{,}41x_4=1{,}55. \end{cases}$

№ 26. $\begin{cases} 1{,}43x_1+0{,}87x_2-1{,}57x_3-0{,}58x_4=2{,}34; \\ 0{,}63x_1-0{,}57x_2-2{,}34x_3+0{,}66x_4=0{,}77; \\ 1{,}57x_1+0{,}66x_2-0{,}57x_3+1{,}15x_4=-0{,}24; \\ 0{,}88x_1-0{,}67x_2+0{,}55x_3-0{,}45x_4=0{,}56. \end{cases}$

№ 27. $\begin{cases} 1{,}71x_1-0{,}83x_2+1{,}44x_3-0{,}72x_4=1{,}35; \\ 0{,}64x_1-0{,}85x_2-0{,}43x_3+0{,}88x_4=0{,}77; \\ 0{,}38x_1+1{,}42x_2+0{,}63x_3-1{,}55x_4=0{,}28; \\ 0{,}83x_1-0{,}66x_2+0{,}58x_3+1{,}22x_4=-0{,}47. \end{cases}$

№ 28. $\begin{cases} 0{,}85x_1+1{,}27x_2-2{,}37x_3+0{,}57x_4=1{,}47; \\ 1{,}47x_1-0{,}28x_2+0{,}56x_3-1{,}21x_4=0{,}86; \\ 0{,}66x_1+1{,}31x_2-0{,}63x_3+0{,}43x_4=-0{,}55; \\ 0{,}57x_1-0{,}78x_2-0{,}56x_3-0{,}83x_4=0{,}27. \end{cases}$

№ 29. $\begin{cases} 0{,}68x_1+1{,}32x_2-0{,}63x_3-0{,}87x_4=1{,}43; \\ 0{,}57x_1+0{,}36x_2-1{,}24x_3-0{,}23x_4=0{,}33; \\ 0{,}82x_1-0{,}32x_2+1{,}42x_3+1{,}48x_4=-0{,}84; \\ 0{,}56x_1-1{,}20x_2+1{,}50x_3-0{,}64x_4=0{,}45. \end{cases}$

№ 30. $\begin{cases} 1{,}42x_1+2{,}34x_2-0{,}88x_3+0{,}53x_4=0{,}72; \\ 0{,}71x_1-1{,}15x_2+0{,}53x_3-0{,}67x_4=-0{,}18; \\ 0{,}55x_1-0{,}93x_2-1{,}42x_3+1{,}32x_4=0{,}68; \\ 0{,}44x_1-0{,}25x_2+1{,}92x_3-1{,}08x_4=0{,}43. \end{cases}$

Образец выполнения задания

$$\begin{cases} 1{,}35x_1-1{,}72x_2-0{,}62x_3+0{,}48x_4=0{,}93; \\ 1{,}08x_1+0{,}64x_2-0{,}95x_3+1{,}54x_4=1{,}64; \\ 0{,}88x_1-0{,}72x_2+1{,}36x_3-0{,}68x_4=-0{,}85; \\ 0{,}64x_1+1{,}48x_2+0{,}82x_3-1{,}58x_4=-1{,}32. \end{cases}$$

Вычисления производим по следующей схеме:

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободный член	$\sum$
1,35	−1,72	−0,62	0,48	0,93	0,42
1,08	0,64	−0,95	1,54	1,64	3,95
0,88	−0,72	1,36	−0,68	−0,85	−0,01
0,64	1,48	0,82	−1,58	−1,32	0,04
1,35 $\boxed{1}$	−1,27410	−0,45926	0,35555	0,68888	0,31111
1,08	2,01603 $\boxed{1}$	−0,22520	0,57341	0,44444	1,79263
0,88	0,40121	1,85450 $\boxed{1}$	−0,65945	−0,88138	−0,54085
0,64	2,29542	1,63086	−2,04830 $\boxed{1}$	0,65598	1,65596
			1	0,65598	1,65596
		1		−0,44879	0,55117
	1			−0,03277	0,96721
1				0,20778	1,20778

Ответ: $x_1=0{,}2078$; $x_2=-0{,}0328$; $x_3=-0{,}4488$; $x_4=0{,}6560$;
$\bar{x}_1=1{,}2078$; $\bar{x}_2=0{,}9672$; $\bar{x}_3=0{,}5512$; $\bar{x}_4=1{,}6569$.

Работа 7

Задание. *Используя компактную схему Халецкого, обратить матрицу* и уточнить ее элементы до 10^{-5}.

№ 1. $\begin{pmatrix} 1{,}22 & 0{,}83 & 0{,}54 \\ 0{,}66 & -0{,}32 & 0{,}47 \\ -0{,}83 & 0{,}25 & 0{,}63 \end{pmatrix}$.

№ 2. $\begin{pmatrix} 0{,}64 & -0{,}35 & 0{,}28 \\ -1{,}43 & -0{,}84 & 0{,}52 \\ 0{,}77 & 0{,}54 & -0{,}64 \end{pmatrix}$.

№ 3. $\begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}27 \\ 1{,}43 & -0{,}84 & 0{,}93 \\ -0{,}85 & 0{,}45 & -0{,}62 \end{pmatrix}$.

№ 4. $\begin{pmatrix} 1{,}72 & -0{,}88 & 0{,}72 \\ 0{,}76 & -1{,}04 & 0{,}38 \\ 0{,}64 & 0{,}35 & 0{,}57 \end{pmatrix}$.

№ 5. $\begin{pmatrix} 3{,}56 & 1{,}23 & 0{,}85 \\ -1{,}21 & 0{,}64 & 0{,}88 \\ -0{,}83 & 0{,}47 & -0{,}36 \end{pmatrix}$.

№ 6. $\begin{pmatrix} 0{,}63 & 0{,}57 & -0{,}83 \\ 1{,}24 & 0{,}87 & -0{,}54 \\ 1{,}32 & -0{,}44 & 0{,}63 \end{pmatrix}$.

№ 7. $\begin{pmatrix} 1{,}45 & -0{,}55 & 0{,}72 \\ -0{,}73 & 0{,}62 & 0{,}48 \\ 0{,}84 & -0{,}48 & 0{,}23 \end{pmatrix}$.

№ 8. $\begin{pmatrix} 0{,}84 & -0{,}34 & 0{,}27 \\ -0{,}68 & -0{,}56 & 0{,}32 \\ 0{,}27 & -0{,}34 & 0{,}78 \end{pmatrix}$.

№ 9. $\begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}25 & 0{,}44 \\ 0{,}84 & -0{,}72 & 0{,}57 \\ -1{,}33 & 0{,}28 & 1{,}05 \end{pmatrix}$.

№ 10. $\begin{pmatrix} 1{,}32 & 1{,}22 & 0{,}64 \\ 0{,}57 & -0{,}48 & 0{,}24 \\ 0{,}38 & -1{,}23 & -0{,}21 \end{pmatrix}$.

№ 11. $\begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}38 & -0{,}48 \\ 1{,}45 & 0{,}84 & 0{,}92 \\ 1{,}23 & -0{,}43 & 0{,}65 \end{pmatrix}$.

№ 12. $\begin{pmatrix} 0{,}64 & -1{,}04 & 0{,}53 \\ -1{,}44 & 0{,}68 & 0{,}87 \\ 0{,}35 & 0{,}27 & -0{,}44 \end{pmatrix}$.

№ 13. $\begin{pmatrix} 1{,}83 & -0{,}64 & 0{,}34 \\ 0{,}63 & -0{,}25 & -0{,}57 \\ 0{,}77 & 0{,}36 & 0{,}68 \end{pmatrix}$.

№ 14. $\begin{pmatrix} 0{,}64 & 0{,}54 & -0{,}33 \\ 0{,}84 & -0{,}92 & 0{,}43 \\ 0{,}24 & 1{,}03 & -0{,}41 \end{pmatrix}$.

№ 15. $\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}18 & 0{,}17 \\ 0{,}54 & 1{,}24 & 0{,}95 \\ 0{,}15 & 0{,}83 & 0{,}51 \end{pmatrix}$.

№ 16. $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}77 & 0{,}39 \\ 0{,}81 & 1{,}79 & 0{,}95 \\ 0{,}64 & 0{,}33 & 0{,}04 \end{pmatrix}$.

№ 17. $\begin{pmatrix} 2{,}17 & 0{,}79 & 0{,}32 \\ 0{,}88 & 0{,}45 & 0{,}37 \\ 0{,}88 & 0{,}01 & 2{,}41 \end{pmatrix}$.

№ 18. $\begin{pmatrix} 0{,}94 & 0{,}33 & 0{,}75 \\ 0{,}68 & 3{,}15 & 0{,}81 \\ 0{,}21 & 0{,}64 & 0{,}57 \end{pmatrix}$.

№ 19. $\begin{pmatrix} 0{,}89 & 0{,}85 & 0{,}79 \\ 0{,}75 & 0{,}77 & 0{,}85 \\ 0{,}89 & 0{,}68 & 0{,}65 \end{pmatrix}$.

№ 20. $\begin{pmatrix} 0{,}19 & 0{,}51 & 0{,}86 \\ 0{,}87 & 0{,}32 & 0{,}85 \\ 0{,}66 & 0{,}67 & 0{,}84 \end{pmatrix}$.

№ 21. $\begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}69 & 0{,}29 \\ 0{,}56 & 0{,}98 & 0{,}42 \\ 0{,}88 & 0{,}35 & 0{,}85 \end{pmatrix}$.

№ 22. $\begin{pmatrix} 0{,}73 & 0{,}56 & 0{,}56 \\ 1{,}74 & 1{,}98 & 0{,}31 \\ 0{,}15 & 0{,}17 & 0{,}18 \end{pmatrix}$.

№ 23. $\begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}79 & 0{,}48 \\ 0{,}18 & 0{,}89 & 0{,}08 \\ 0{,}76 & 0{,}48 & 0{,}12 \end{pmatrix}$.

№ 24. $\begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}89 & 0{,}57 \\ 0{,}27 & 0{,}98 & 0{,}69 \\ 0{,}65 & 0{,}27 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.

№ 25. $\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}87 & 0{,}31 \\ 0{,}78 & 0{,}27 & 0{,}79 \\ 1{,}32 & 0{,}88 & 0{,}45 \end{pmatrix}$.

№ 26. $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}47 & 0{,}67 \\ 0{,}93 & 0{,}17 & 0{,}46 \\ 0{,}77 & 0{,}71 & 0{,}13 \end{pmatrix}$.

№ 27. $\begin{pmatrix} 0{,}47 & 0{,}45 & 0{,}49 \\ 0{,}59 & 0{,}74 & 0{,}36 \\ 0{,}35 & 0{,}61 & 0{,}17 \end{pmatrix}$.

№ 28. $\begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}17 & 0{,}85 \\ 0{,}43 & 0{,}76 & 0{,}47 \\ 0{,}86 & 0{,}32 & 0{,}56 \end{pmatrix}$.

№ 29. $\begin{pmatrix}0,15 & 0,68 & 0,22\\ 0,78 & 0,36 & 0,83\\ 0,37 & 0,94 & 0,52\end{pmatrix}$.

№ 30. $\begin{pmatrix}0,12 & 0,13 & 0,74\\ 0,47 & 0,14 & 0,29\\ 0,16 & 0,17 & 0,56\end{pmatrix}$.

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix}1,16 & 0,83 & -0,66\\ 0,45 & -0,54 & 0,83\\ 0,32 & 0,28 & 1,06\end{pmatrix}.$$

Для нахождения обратной матрицы используем компактную схему Халецкого (при расчетах сохраняем тысячные доли):

Данная матрица					
1,16	0,83	−0,66			
0,75	−0,54	0,83			
0,32	0,28	1,06			
1,16 $\boxed{1}$	0,716	−0,569	0,495	0,655	−0,205
0,75	−1,077 $\boxed{1}$	−1,167	0,326	−0,886	0,896
0,32	0,051	1,302 $\boxed{1}$	−0,235	0,036	0,768

Следовательно,

$$D_0=\begin{pmatrix}0,495 & 0,655 & -0,205\\ 0,326 & -0,886 & 0,896\\ -0,235 & 0,036 & 0,768\end{pmatrix}. \quad D_0\approx A^{-1}.$$

Будем производить уточнение до четырех-пяти десятичных знаков. Находим

$$AD_0=\begin{pmatrix}0,99988 & 0,00066 & -0,001\\ 0,00016 & 0,99957 & -0,00015\\ 0,00058 & -0,00032 & 0,99936\end{pmatrix};$$

$$F_0=E-AD_0=\begin{pmatrix}0,00012 & -0,00066 & 0,001\\ -0,00016 & 0,00043 & 0,00015\\ -0,00058 & 0,00032 & 0,00064\end{pmatrix}.$$

Так как $\| F_0 \|_1=0,00178<1$, то процесс сходится. Далее, имеем

$$D_0F_0=\begin{pmatrix}0,0001643 & -0,00011065 & 0,00046205\\ -0,0003388 & -0,00030942 & 0,00076654\\ -0,0004794 & 0,00041634 & 0,00021692\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}0,000164 & -0,000111 & 0,000462\\ -0,000339 & -0,000309 & 0,000767\\ -0,000479 & 0,000416 & 0,000262\end{pmatrix};$$

$$D_1=D_0+D_0F_0=\begin{pmatrix}0,495164 & 0,654889 & -0,204538\\ 0,325661 & -0,886309 & 0,896767\\ -0,235479 & 0,036416 & 0,768262\end{pmatrix};$$

$$AD_1=\begin{pmatrix} 1,00010501 & -0,00000021 & -0,00000039 \\ 0,00006849 & 0,99999889 & -0,00000022 \\ 0,00002982 & -0,00000108 & 1,00000032 \end{pmatrix};$$

$$F_1=E-AD_1=\begin{pmatrix} -0,00010501 & 0,00000021 & 0,00000039 \\ -0,00006849 & 0,00000111 & 0,00000022 \\ -0,00002982 & 0,00000108 & -0,00000032 \end{pmatrix};$$

$$D_1F_1=\begin{pmatrix} -0,000091 & 0,000001 & 0 \\ 0 & 0,000001 & 0 \\ -0,000001 & 0,000001 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D_2=D_1+D_1F_1=\begin{pmatrix} 0,495073 & 0,654890 & -0,204538 \\ 0,325661 & -0,886308 & 0,896767 \\ -0,235480 & 0,036417 & 0,768262 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1}\approx\begin{pmatrix} 0,49507 & 0,65489 & -0,20454 \\ 0,32566 & -0,88631 & 0,89677 \\ -0,23548 & 0,03642 & 0,76826 \end{pmatrix}.$

Работа 8

Задание. Методом итераций решить систему линейных уравнений с точностью до 0,001, предварительно оценив число необходимых для этого шагов.

№ 1. $\begin{cases} x_1=0,23x_1-0,04x_2+0,21x_3-0,18x_4+1,24; \\ x_2=0,45x_1-0,23x_2+0,06x_3-0,88; \\ x_3=0,26x_1+0,34x_2-0,11x_3+0,62; \\ x_4=0,05x_1-0,26x_2+0,34x_3-0,12x_4-1,17. \end{cases}$

№ 2. $\begin{cases} x_1=0,21x_1+0,12x_2-0,34x_3-0,16x_4-0,64; \\ x_2=0,34x_1-0,08x_2+0,17x_3-0,18x_4+1,42; \\ x_3=0,16x_1+0,34x_2+0,15x_3-0,31x_4-0,42; \\ x_4=0,12x_1-0,26x_2-0,08x_3+0,25x_4+0,83. \end{cases}$

№ 3. $\begin{cases} x_1=0,32x_1-0,18x_2+0,02x_3+0,21x_4+1,83; \\ x_2=0,16x_1+0,12x_2-0,14x_3+0,27x_4-0,65; \\ x_3=0,37x_1+0,27x_2-0,02x_3-0,24x_4+2,23; \\ x_4=0,12x_1+0,21x_2-0,18x_3+0,25x_4-1,13. \end{cases}$

№ 4. $\begin{cases} x_1=0,42x_1-0,32x_2+0,03x_3+0,44; \\ x_2=0,11x_1-0,26x_2-0,36x_3+1,42; \\ x_3=0,12x_1+0,08x_2-0,14x_3-0,24x_4-0,83; \\ x_4=0,15x_1-0,35x_2-0,18x_3-1,42. \end{cases}$

№ 5. $\begin{cases} x_1=0,18x_1-0,34x_2-0,12x_3+0,15x_4-1,33; \\ x_2=0,11x_1+0,23x_2-0,15x_3+0,32x_4+0,84; \\ x_3=0,05x_1-0,12x_2+0,14x_3-0,18x_4-1,16; \\ x_4=0,12x_1+0,08x_2+0,06x_3+0,57. \end{cases}$

№ 6. $\begin{cases} x_1=0,13x_1+0,23x_2-0,44x_3-0,05x_4+2,13; \\ x_2=0,24x_1-0,31x_3+0,15x_4-0,18; \\ x_3=0,06x_1+0,15x_2-0,23x_4+1,44; \\ x_4=0,72x_1-0,08x_2-0,05x_3+2,42. \end{cases}$

№ 7. $\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_1+0{,}31x_2-0{,}18x_3+0{,}22x_4-1{,}71; \\ x_2 = -0{,}21x_1+0{,}33x_3+0{,}22x_4+0{,}62; \\ x_3 = 0{,}32x_1-0{,}18x_2+0{,}05x_3-0{,}19x_4-0{,}89; \\ x_4 = 0{,}12x_1+0{,}28x_2-0{,}14x_3+0{,}94. \end{cases}$

№ 8. $\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1+0{,}27x_2-0{,}22x_3-0{,}18x_4+1{,}21; \\ x_2 = -0{,}21x_1-0{,}45x_3+0{,}18x_4-0{,}33; \\ x_3 = 0{,}12x_1+0{,}13x_2-0{,}33x_3+0{,}18x_4-0{,}48; \\ x_4 = 0{,}33x_1-0{,}05x_2+0{,}06x_3-0{,}28x_4-0{,}17. \end{cases}$

№ 9. $\begin{cases} x_1 = 0{,}19x_1-0{,}07x_2+0{,}38x_3-0{,}21x_4-0{,}81; \\ x_2 = -0{,}22x_1+0{,}08x_2+0{,}11x_3+0{,}33x_4-0{,}64; \\ x_3 = 0{,}51x_1-0{,}07x_2+0{,}09x_3-0{,}11x_4+1{,}71; \\ x_4 = 0{,}33x_1-0{,}41x_2-1{,}21. \end{cases}$

№ 10. $\begin{cases} x_1=0{,}22x_2-0{,}11x_3+0{,}31x_4+2{,}7; \\ x_2=0{,}38x_1-0{,}12x_3+0{,}22x_4-1{,}5; \\ x_3=0{,}11x_1+0{,}23x_2-0{,}51x_4+1{,}2; \\ x_4=0{,}17x_1-0{,}21x_2+0{,}31x_3-0{,}17. \end{cases}$

№ 11. $\begin{cases} x_1=0{,}07x_1-0{,}08x_2+0{,}11x_3-0{,}18x_4-0{,}51; \\ x_2=0{,}18x_1+0{,}52x_2+0{,}21x_4+1{,}17; \\ x_3=0{,}13x_1+0{,}31x_2-0{,}21x_4-1{,}02; \\ x_4=0{,}08x_1-0{,}33x_3+0{,}28x_4-0{,}28. \end{cases}$

№ 12. $\begin{cases} x_1=0{,}05x_1-0{,}06x_2-0{,}12x_3+0{,}14x_4-2{,}17; \\ x_2=0{,}04x_1-0{,}12x_2+0{,}08x_3+0{,}11x_4+1{,}4; \\ x_3=0{,}34x_1+0{,}08x_2-0{,}06x_3+0{,}14x_4-2{,}1; \\ x_4=0{,}11x_1+0{,}12x_2-0{,}03x_4-0{,}8. \end{cases}$

№ 13. $\begin{cases} x_1=0{,}08x_1-0{,}03x_2-0{,}04x_4-1{,}2; \\ x_2=0{,}31x_2+0{,}27x_3-0{,}08x_4+0{,}81; \\ x_3=0{,}33x_1-0{,}07x_3+0{,}21x_4-0{,}92; \\ x_4=0{,}11x_1+0{,}03x_3+0{,}58x_4+0{,}17. \end{cases}$

№ 14. $\begin{cases} x_1=0{,}12x_1-0{,}23x_2+0{,}25x_3-0{,}16x_4+1{,}24; \\ x_2=0{,}14x_1+0{,}34x_2-0{,}18x_3+0{,}24x_4-0{,}89; \\ x_3=0{,}33x_1+0{,}03x_2+0{,}16x_3-0{,}32x_4+1{,}15; \\ x_4=0{,}12x_1-0{,}05x_2+0{,}15x_4-0{,}57. \end{cases}$

№ 15. $\begin{cases} x_1=0{,}23x_1-0{,}14x_2+0{,}06x_3-0{,}12x_4+1{,}21; \\ x_2=0{,}12x_1+0{,}32x_3-0{,}18x_4-0{,}72; \\ x_3=0{,}08x_1-0{,}12x_2+0{,}23x_3+0{,}32x_4-0{,}58; \\ x_4=0{,}25x_1+0{,}22x_2+0{,}14x_3+1{,}56. \end{cases}$

№ 16. $\begin{cases} x_1=0{,}14x_1+0{,}23x_2+0{,}18x_3+0{,}17x_4-1{,}42; \\ x_2=0{,}12x_1-0{,}14x_2+0{,}08x_3+0{,}09x_4-0{,}83; \\ x_3=0{,}16x_1+0{,}24x_2-0{,}35x_4+1{,}21; \\ x_4=0{,}23x_1-0{,}08x_2+0{,}05x_3+0{,}25x_4+0{,}65. \end{cases}$

№ 17. $\begin{cases} x_1=0{,}24x_1+0{,}21x_2+0{,}06x_3-0{,}34x_4+1{,}42; \\ x_2=0{,}05x_1+0{,}32x_3+0{,}12x_4-0{,}57; \\ x_3=0{,}35x_1-0{,}27x_2-0{,}05x_4+0{,}68; \\ x_4=0{,}12x_1-0{,}43x_2+0{,}04x_3-0{,}21x_4-2{,}14. \end{cases}$

№ 18. $\begin{cases} x_1=0{,}17x_1+0{,}27x_2-0{,}13x_3-0{,}11x_4-1{,}42; \\ x_2=0{,}13x_1-0{,}12x_2+0{,}09x_3-0{,}06x_4+0{,}48; \\ x_3=0{,}11x_1+0{,}05x_2-0{,}02x_3+0{,}12x_4-2{,}34; \\ x_4=0{,}13x_1+0{,}18x_2+0{,}24x_3+0{,}43x_4+0{,}72. \end{cases}$

№ 19. $\begin{cases} x_1 = 0{,}15x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}14x_4 - 0{,}48; \\ x_2 = 0{,}32x_1 - 0{,}13x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}11x_4 + 1{,}24; \\ x_3 = 0{,}17x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}12x_4 + 1{,}15; \\ x_4 = 0{,}21x_1 - 0{,}16x_2 + 0{,}36x_3 - 0{,}88. \end{cases}$

№ 20. $\begin{cases} x_1 = 0{,}28x_2 - 0{,}17x_3 + 0{,}06x_4 + 0{,}21; \\ x_2 = 0{,}52x_1 + 0{,}12x_3 + 0{,}17x_4 - 1{,}17; \\ x_3 = 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}81; \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}72. \end{cases}$

№ 21. $\begin{cases} x_1 = 0{,}52x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}13x_4 - 0{,}22; \\ x_2 = 0{,}07x_1 - 0{,}38x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}41x_4 + 1{,}8; \\ x_3 = 0{,}04x_1 + 0{,}42x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}07x_4 - 1{,}3; \\ x_4 = 0{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}19x_4 + 0{,}33. \end{cases}$

№ 22. $\begin{cases} x_1 = 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 - 0{,}62x_3 + 0{,}08x_4 - 1{,}3; \\ x_2 = 0{,}03x_1 + 0{,}28x_2 + 0{,}33x_3 - 0{,}07x_4 + 1{,}1; \\ x_3 = 0{,}09x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}42x_3 + 0{,}28x_4 - 1{,}7; \\ x_4 = 0{,}19x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}37x_4 + 1{,}5. \end{cases}$

№ 23. $\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}18x_4 - 1{,}2; \\ x_2 = 0{,}18x_2 + 0{,}43x_3 - 0{,}08x_4 + 0{,}33; \\ x_3 = 0{,}22x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}07x_4 + 0{,}48; \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}04x_4 - 1{,}2. \end{cases}$

№ 24. $\begin{cases} x_1 = 0{,}03x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}22x_3 - 0{,}33x_4 + 0{,}43; \\ x_2 = 0{,}22x_1 + 0{,}55x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}07x_4 - 1{,}8; \\ x_3 = 0{,}33x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}08x_3 - 0{,}05x_4 - 0{,}8; \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}17x_2 + 0{,}29x_3 + 0{,}33x_4 + 1{,}7. \end{cases}$

№ 25. $\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}07x_4 + 0{,}11; \\ x_2 = 0{,}45x_2 - 0{,}23x_3 + 0{,}07x_4 - 0{,}33; \\ x_3 = 0{,}11x_1 - 0{,}08x_3 + 0{,}18x_4 + 0{,}85; \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}21x_4 - 1{,}7. \end{cases}$

№ 26. $\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}16x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}15x_4 + 2{,}42; \\ x_2 = 0{,}16x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}21x_4 + 1{,}43; \\ x_3 = 0{,}05x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}34x_4 - 0{,}16; \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}14x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}06x_4 + 1{,}62. \end{cases}$

№ 27. $\begin{cases} x_1 = 0{,}08x_2 - 0{,}23x_3 + 0{,}32x_4 + 1{,}34; \\ x_2 = 0{,}16x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}16x_4 - 2{,}33; \\ x_3 = 0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}32x_3 - 0{,}18x_4 + 0{,}34; \\ x_4 = 0{,}25x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}16x_3 + 0{,}03x_4 + 0{,}63. \end{cases}$

№ 28. $\begin{cases} x_1 = 0{,}06x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}16x_4 + 2{,}43; \\ x_2 = 0{,}32x_1 + 0{,}23x_3 - 0{,}05x_4 - 1{,}12; \\ x_3 = 0{,}16x_1 - 0{,}08x_2 - 0{,}12x_4 + 0{,}43; \\ x_4 = 0{,}09x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}83. \end{cases}$

№ 29. $\begin{cases} x_1 = 0{,}34x_2 + 0{,}23x_3 - 0{,}06x_4 + 1{,}42; \\ x_2 = 0{,}11x_1 - 0{,}23x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}36x_4 - 0{,}66; \\ x_3 = 0{,}23x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}16x_3 - 0{,}35x_4 + 1{,}08; \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}47x_3 + 0{,}18x_4 + 1{,}72. \end{cases}$

№ 30. $\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}06x_4 + 0{,}67; \\ x_2 = 0{,}18x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}33x_3 - 0{,}88; \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}32x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}07x_4 - 0{,}18; \\ x_4 = 0{,}05x_1 - 0{,}11x_2 + 0{,}09x_3 - 0{,}12x_4 + 1{,}44. \end{cases}$

Образец выполнения задания

$$\begin{cases} x_1=0{,}32x_1-0{,}05x_2+0{,}11x_3-0{,}08x_4+2{,}15; \\ x_2=0{,}11x_1+0{,}16x_2-0{,}28x_3-0{,}06x_4-0{,}83; \\ x_3=0{,}08x_1-0{,}15x_2+0{,}12x_4+1{,}16; \\ x_4=-0{,}21x_1+0{,}13x_2-0{,}27x_3+0{,}44. \end{cases}$$

Число шагов, дающих наверняка ответ с точностью до 0,001, определим с помощью соотношения

$$\| X^*-X^k \| \leqslant \frac{\| A \|^{k+1}}{1-\| A \|} \cdot \| F \| \leqslant 0{,}001.$$

Здесь $\| A \|_1=\max\{0{,}56;\ 0{,}61;\ 0{,}35;\ 0{,}61\}<1$; значит, итерационный процесс сходится; $\| F \|_1=2{,}15$. Имеем

$$\frac{0{,}61^{k+1}}{0{,}39}\cdot 2{,}15<0{,}001; \quad 0{,}61^{k+1}<\frac{0{,}001\cdot 0{,}39}{2{,}15};$$

$$(k+1)\cdot \lg 0{,}61<-3+\lg 0{,}39-\lg 2{,}15;$$

$$k+1>\frac{-3+1{,}5911-0{,}3324}{1{,}7853}=\frac{3{,}7413}{0{,}2147}=17{,}5; \quad k\geqslant 17.$$

Вычисления располагаем в таблице:

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	2,15	−0,83	1,16	0,44
1	2,9719	−1,0775	1,5093	−0,4326
2	2,3555	−1,0721	1,5075	−0,7317
3	3,5017	−1,0106	1,5015	−0,8111
4	3,5511	−0,9277	1,4944	−0,8321
5	3,5637	−0,9563	1,4834	−0,8298
6	3,5678	−0,9566	1,4890	−0,8332
7	3,5700	−0,9575	1,4889	−0,8356
8	3,5709	−0,9573	1,4890	−0,8362
9	3,5712	−0,9571	1,4889	−0,8364
10	3,5713	−0,9570	1,4890	−0,8364

Сходимость в тысячных долях имеет место уже на 10-м шаге.
Ответ: $x_1\approx 3{,}571$; $x_2\approx -0{,}957$; $x_3\approx 1{,}489$; $x_4\approx -0{,}836$.

Работа 9

Задание. Методом Зейделя решить с точностью 0,001 систему линейных уравнений, приведя ее к виду, удобному для итераций.

№ 1. $\begin{cases} 2{,}7x_1+3{,}3x_2+1{,}3x_3=2{,}1; \\ 3{,}5x_1-1{,}7x_2+2{,}8x_3=1{,}7; \\ 4{,}1x_1+5{,}8x_2-1{,}7x_3=0{,}8. \end{cases}$

№ 2. $\begin{cases} 1{,}7x_1+2{,}8x_2+1{,}9x_3=0{,}7; \\ 2{,}1x_1+3{,}4x_2+1{,}8x_3=1{,}1; \\ 4{,}2x_1-1{,}7x_2+1{,}3x_3=2{,}8. \end{cases}$

№ 3. $\begin{cases} 3{,}1x_1+2{,}8x_2+1{,}9x_3=0{,}2; \\ 1{,}9x_1+3{,}1x_2+2{,}1x_3=2{,}1; \\ 7{,}5x_1+3{,}8x_2+4{,}8x_3=5{,}6. \end{cases}$

№ 4. $\begin{cases} 9{,}1x_1+5{,}6x_2+7{,}8x_3=9{,}8; \\ 3{,}8x_1+5{,}1x_2+2{,}8x_3=6{,}7; \\ 4{,}1x_1+5{,}7x_2+1{,}2x_3=5{,}8. \end{cases}$

№ 5. $\begin{cases} 3{,}3x_1+2{,}1x_2+2{,}8x_3=0{,}8; \\ 4{,}1x_1+3{,}7x_2+4{,}8x_3=5{,}7; \\ 2{,}7x_1+1{,}8x_2+1{,}1x_3=3{,}2. \end{cases}$

№ 6. $\begin{cases} 7{,}6x_1+5{,}8x_2+4{,}7x_3=10{,}1; \\ 3{,}8x_1+4{,}1x_2+2{,}7x_3=9{,}7; \\ 2{,}9x_1+2{,}1x_2+3{,}8x_3=7{,}8. \end{cases}$

№ 7. $\begin{cases} 3{,}2x_1-2{,}5x_2+3{,}7x_3=6{,}5; \\ 0{,}5x_1+0{,}34x_2+1{,}7x_3=-0{,}24; \\ 1{,}6x_1+2{,}3x_2-1{,}5x_3=4{,}3. \end{cases}$

№ 8. $\begin{cases} 5{,}4x_1-2{,}3x_2+3{,}4x_3=-3{,}5; \\ 4{,}2x_1+1{,}7x_2-2{,}3x_3=2{,}7; \\ 3{,}4x_1+2{,}4x_2+7{,}4x_3=1{,}9. \end{cases}$

№ 9. $\begin{cases} 3{,}6x_1+1{,}8x_2-4{,}7x_3=3{,}8; \\ 2{,}7x_1-3{,}6x_2+1{,}9x_3=0{,}4; \\ 1{,}5x_1+4{,}5x_2+3{,}3x_3=-1{,}6. \end{cases}$

№ 10. $\begin{cases} 5{,}6x_1+2{,}7x_2-1{,}7x_3=1{,}9; \\ 3{,}4x_1-3{,}6x_2-6{,}7x_3=-2{,}4; \\ 0{,}8x_1+1{,}3x_2+3{,}7x_3=1{,}2. \end{cases}$

№ 11. $\begin{cases} 2{,}7x_1+0{,}9x_2-1{,}5x_3=3{,}5; \\ 4{,}5x_1-2{,}8x_2+6{,}7x_3=2{,}6; \\ 5{,}1x_1+3{,}7x_2-1{,}4x_3=-0{,}14. \end{cases}$

№ 12. $\begin{cases} 4{,}5x_1-3{,}5x_2+7{,}4x_3=2{,}5; \\ 3{,}1x_1-0{,}6x_2-2{,}3x_3=-1{,}5; \\ 0{,}8x_1+7{,}4x_2-0{,}5x_3=6{,}4. \end{cases}$

№ 13. $\begin{cases} 3{,}8x_1+6{,}7x_2-1{,}2x_3=5{,}2; \\ 6{,}4x_1+1{,}3x_2-2{,}7x_3=3{,}8; \\ 2{,}4x_1-4{,}5x_2+3{,}5x_3=-0{,}6. \end{cases}$

№ 14. $\begin{cases} 5{,}4x_1-6{,}2x_2-0{,}5x_3=0{,}52; \\ 3{,}4x_1+2{,}3x_2+0{,}8x_3=-0{,}8; \\ 2{,}4x_1-1{,}1x_2+3{,}8x_3=1{,}8. \end{cases}$

№ 15. $\begin{cases} 7{,}8x_1+5{,}3x_2+4{,}8x_3=1{,}8; \\ 3{,}3x_1+1{,}1x_2+1{,}8x_3=2{,}3; \\ 4{,}5x_1+3{,}3x_2+2{,}8x_3=3{,}4. \end{cases}$

№ 16. $\begin{cases} 3{,}8x_1+4{,}1x_2-2{,}3x_3=4{,}8; \\ -2{,}1x_1+3{,}9x_2-5{,}8x_3=3{,}3; \\ 1{,}8x_1+1{,}1x_2-2{,}1x_3=5{,}8. \end{cases}$

№ 17. $\begin{cases} 1{,}7x_1-2{,}2x_2+3{,}0x_3=1{,}8; \\ 2{,}1x_1+1{,}9x_2-2{,}3x_3=2{,}8; \\ 4{,}2x_1+3{,}9x_2-3{,}1x_3=5{,}1. \end{cases}$

№ 18. $\begin{cases} 2{,}8x_1+3{,}8x_2-3{,}2x_3=4{,}5; \\ 2{,}5x_1-2{,}8x_2+3{,}3x_3=7{,}1; \\ 6{,}5x_1-7{,}1x_2+4{,}8x_3=6{,}3. \end{cases}$

№ 19. $\begin{cases} 3{,}3x_1+3{,}7x_2+4{,}2x_3=5{,}8; \\ 2{,}7x_1+2{,}3x_2-2{,}9x_3=6{,}1; \\ 4{,}1x_1+4{,}8x_2-5{,}0x_3=7{,}0. \end{cases}$

№ 20. $\begin{cases} 7{,}1x_1+6{,}8x_2+6{,}1x_3=7{,}0; \\ 5{,}0x_1+4{,}8x_2+5{,}3x_3=6{,}1; \\ 8{,}2x_1+7{,}8x_2+7{,}1x_3=5{,}8. \end{cases}$

№ 21. $\begin{cases} 3{,}7x_1+3{,}1x_2+4{,}0x_3=5{,}0; \\ 4{,}1x_1+4{,}5x_2-4{,}8x_3=4{,}9; \\ -2{,}1x_1-3{,}7x_2+1{,}8x_3=2{,}7. \end{cases}$

№ 22. $\begin{cases} 4{,}1x_1+5{,}2x_2-5{,}8x_3=7{,}0; \\ 3{,}8x_1-3{,}1x_2+4{,}0x_3=5{,}3; \\ 7{,}8x_1+5{,}3x_2-6{,}3x_3=5{,}8. \end{cases}$

№ 23. $\begin{cases} 3{,}7x_1-2{,}3x_2+4{,}5x_3=2{,}4; \\ 2{,}5x_1+4{,}7x_2-7{,}8x_3=3{,}5; \\ 1{,}6x_1+5{,}3x_2+1{,}3x_3=-2{,}4. \end{cases}$

№ 24. $\begin{cases} 6{,}3x_1+5{,}2x_2-0{,}6x_3=1{,}5; \\ 3{,}4x_1-2{,}3x_2+3{,}4x_3=2{,}7; \\ 0{,}8x_1+1{,}4x_2+3{,}5x_3=-2{,}3. \end{cases}$

№ 25. $\begin{cases} 1{,}5x_1+2{,}3x_2-3{,}7x_3=4{,}5; \\ 2{,}8x_1+3{,}4x_2+5{,}8x_3=-3{,}2; \\ 1{,}2x_1+7{,}3x_2-2{,}3x_3=5{,}6. \end{cases}$

№ 26. $\begin{cases} 0{,}9x_1+2{,}7x_2-3{,}8x_3=2{,}4; \\ 2{,}5x_1+5{,}8x_2-0{,}5x_3=3{,}5; \\ 4{,}5x_1-2{,}1x_2+3{,}2x_3=-1{,}2. \end{cases}$

№ 27. $\begin{cases} 2{,}4x_1+2{,}5x_2-2{,}9x_3=4{,}5; \\ 0{,}8x_1+3{,}5x_2-1{,}4x_3=3{,}2; \\ 1{,}5x_1-2{,}3x_2+8{,}6x_3=-5{,}5. \end{cases}$

№ 28. $\begin{cases} 5{,}4x_1-2{,}4x_2+3{,}8x_3=5{,}5; \\ 2{,}5x_1+6{,}8x_2-1{,}1x_3=4{,}3; \\ 2{,}7x_1-0{,}6x_2+1{,}5x_3=-3{,}5. \end{cases}$

№ 29. $\begin{cases} 2{,}4x_1+3{,}7x_2-8{,}3x_3=2{,}3; \\ 1{,}8x_1+4{,}3x_2+1{,}2x_3=-1{,}2; \\ 3{,}4x_1-2{,}3x_2+5{,}2x_3=3{,}5. \end{cases}$

№ 30. $\begin{cases} 3{,}2x_1-11{,}5x_2+3{,}8x_3=2{,}8; \\ 0{,}8x_1+1{,}3x_2-6{,}4x_3=-6{,}5; \\ 2{,}4x_1+7{,}2x_2-1{,}2x_3=4{,}5. \end{cases}$

Образец выполнения задания

$$\begin{cases} 4{,}5x_1-1{,}8x_2+3{,}6x_3=-1{,}7; & \text{(I)} \\ 3{,}1x_1+2{,}3x_2-1{,}2x_3=3{,}6; & \text{(II)} \\ 1{,}8x_1+2{,}5x_2+4{,}6x_3=2{,}2. & \text{(III)} \end{cases}$$

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк:

$$\begin{cases} 7{,}6x_1+0{,}5x_2+2{,}4x_3= \quad 1{,}9; & (\mathrm{I}+\mathrm{II}) \\ 2{,}2x_1+9{,}1x_2+4{,}4x_3= \quad 9{,}7; & (2\mathrm{III}+\mathrm{II}-\mathrm{I}) \\ -1{,}3x_1+0{,}2x_2+5{,}8x_3=-1{,}4; & (\mathrm{III}-\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1= \quad 2{,}4x_1-0{,}5x_2-2{,}4x_3+1{,}9; \\ 10x_2=-2{,}2x_1+0{,}9x_2-4{,}4x_3+9{,}7; \\ 10x_3= \quad 1{,}3x_1-0{,}2x_2-4{,}2x_3-1{,}4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1= \quad 0{,}24x_1-0{,}05x_2-0{,}24x_3+0{,}19; \\ x_2=-0{,}22x_1+0{,}09x_2-0{,}44x_3+0{,}97; \\ x_3= \quad 0{,}13x_1-0{,}02x_2+0{,}42x_3-0{,}14. \end{cases}$$

Норма $\| A \|_1$ матрицы, состоящей из коэффициентов при неизвестных в правых частях уравнений, равна $\{0{,}53;\ 0{,}77;\ 0{,}57\}=0{,}77<1$; значит, процесс Зейделя сходится.

Вычисления располагаем в таблице:

N	x_1	x_2	x_3	N	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	−0,14	5	0,2467	1,1138	−0,2237
1	0,2207	1,0703	−0,1915	6	0,2472	1,1143	−0,2241
2	0,2354	1,0988	−0,2118	7	0,2474	1,1145	−0,2243
3	0,2424	1,1088	−0,2196	8	0,2475	1,1145	−0,2243
4	0,2454	1,1124	−0,2226				

Ответ: $x_1 \approx 0{,}248$; $x_2 \approx 1{,}115$; $x_3 \approx -0{,}224$.

Глава IV
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Работа 1

Задание. Используя схему Горнера, составить таблицу значений многочлена на отрезке $[0{,}5;\ 2{,}0]$; шаг $h=0{,}25$. Вычисления выполнять с точностью до 0,0001, ответ округлить до тысячных.

№ 1. $1{,}723x^5+0{,}137x^4-0{,}814x^3+2{,}364x^2-1{,}176x+3{,}962$.
№ 2. $1{,}654x^5+0{,}213x^4-0{,}744x^3+1{,}283x^2-2{,}151x+4{,}134$.
№ 3. $1{,}514x^5-0{,}124x^4-0{,}548x^3+3{,}214x^2-1{,}124x+2{,}258$.
№ 4. $0{,}372x^5-0{,}612x^4+0{,}532x^3+1{,}134x^2-1{,}247x-1{,}624$.
№ 5. $0{,}853x^5-1{,}514x^4-0{,}143x^3+1{,}217x^2-2{,}243x+2{,}415$.
№ 6. $0{,}623x^5+1{,}275x^4-0{,}217x^3+1{,}315x^2-3{,}174x-1{,}862$.
№ 7. $1{,}273x^5+0{,}116x^4-0{,}343x^3+3{,}115x^2-1{,}262x+0{,}375$.
№ 8. $0{,}375x^5-1{,}213x^4+1{,}108x^3+0{,}742x^2-3{,}115x+2{,}724$.
№ 9. $1{,}116x^5+0{,}127x^4-0{,}316x^3+1{,}164x^2-2{,}273x-1{,}123$.
№ 10. $0{,}764x^5-0{,}312x^4+1{,}216x^3-2{,}458x^2+1{,}273x+0{,}834$.
№ 11. $0{,}374x^5+0{,}242x^4-1{,}413x^3+0{,}746x^2+3{,}183x-0{,}678$.
№ 12. $1{,}073x^5-0{,}143x^4+0{,}568x^3+1{,}215x^2-3{,}146x+1{,}618$.
№ 13. $0{,}513x^5-0{,}837x^4+1{,}215x^3+2{,}453x^2-1{,}783x-0{,}847$.
№ 14. $1{,}087x^5-1{,}243x^4+0{,}656x^3-0{,}783x^2+2{,}574x+0{,}564$.
№ 15. $0{,}683x^5+1{,}143x^4-0{,}562x^3+1{,}844x^2-2{,}154x+1{,}472$.
№ 16. $1{,}213x^5-0{,}216x^4+1{,}316x^3-2{,}758x^2+3{,}612x-0{,}388$.
№ 17. $1{,}316x^5-0{,}144x^4-0{,}572x^3+1{,}854x^2-2{,}713x+1{,}625$.
№ 18. $1{,}172x^5-0{,}534x^4-0{,}316x^3+1{,}283x^2+1{,}615x-2{,}652$.
№ 19. $0{,}613x^5+0{,}318x^4-1{,}216x^3+2{,}517x^2-3{,}712x+0{,}454$.
№ 20. $0{,}278x^5-0{,}763x^4+1{,}072x^3+1{,}613x^2-2{,}312x-1{,}418$.

№ 21. $0{,}475x^5-0{,}612x^4+1{,}314x^3+1{,}183x^2-3{,}154x+0{,}844$.
№ 22. $0{,}683x^5+0{,}514x^4-0{,}817x^3+2{,}432x^2+1{,}072x-0{,}833$.
№ 23. $1{,}028x^5-0{,}713x^4-1{,}072x^3+1{,}625x^2-3{,}184x-1{,}546$.
№ 24. $0{,}243x^5-1{,}065x^4-0{,}364x^3+2{,}445x^2-1{,}265x+0{,}318$.
№ 25. $0{,}831x^5-0{,}722x^4+1{,}157x^3+1{,}615x^2-2{,}844x-0{,}685$.
№ 26. $0{,}354x^5+0{,}583x^4-1{,}072x^3+1{,}548x^2-2{,}436x-0{,}367$.
№ 27. $1{,}273x^5+0{,}172x^4-0{,}788x^3+1{,}453x^2-2{,}813x+3{,}154$.
№ 28. $0{,}421x^5-0{,}544x^4-1{,}213x^3+0{,}683x^2+3{,}145x-0{,}185$.
№ 29. $1{,}342x^5-0{,}254x^4+0{,}872x^3+1{,}273x^2-1{,}483x+0{,}584$.
№ 30. $1{,}418x^5-1{,}547x^4+0{,}418x^3+1{,}783x^2-2{,}517x+2{,}434$.

Образец выполнения задания

$$P(x)=0{,}883x^5-1{,}217x^4+1{,}452x^3+0{,}572x^2-2{,}343x+1{,}158.$$

Для вычислений по схеме Горнера составим таблицу, содержащую все промежуточные результаты и значения искомого многочлена:

x_i	0,883	−1,217	1,452	0,572	−2,343	1,158
0,50	0,883	−0,7755	1,06425	1,1041	−1,7909	0,2625
0,75	0,883	−0,5547	1,0359	1,3490	−1,3313	0,1595
1,00	0,883	−0,3340	1,1180	1,6900	−0,6530	0,5050
1,25	0,883	−0,1132	1,3104	2,2100	0,9721	2,3731
1,50	0,883	0,1075	1,6132	2,9919	2,1448	4,3752
1,75	0,883	0,3282	2,0264	4,1183	4,8640	9,6699
2,00	0,883	0,5490	2,550	5,6720	9,0010	19,1600

В верхней строке таблицы запишем коэффициенты a_i данного многочлена, в первом столбце — значения аргумента x. Остальные строки содержат значения b_i, которые в схеме Горнера находятся по единой формуле:

$$b_i=b_{i-1}x+a_i \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5); \quad b_0=a_0.$$

В последнем столбце таблицы получаются значения многочлена $P(x)$. Округляя их до тысячных долей, получим ответ:

x_i	$P(x_i)$
0,5	0,263
0,75	0,160
1,00	0,505
1,25	2,373
1,50	4,375
1,75	9,670
2,00	19,160

Работа 2

Задание. Вычислить значения функций при заданных значениях аргумента методом разложения в ряд с точностью до 10^{-6}.

1) $y=e^x$ при а) $x_1=0{,}716+0{,}043n$; б) $x_2=2{,}834-0{,}028n$;
2) $y=\ln(1+x)$ при $x=0{,}122+0{,}018n$;
3) $y=\sin x$ и $y=\cos x$ при а) $x_1=0{,}232+0{,}012n$; б) $x_2=0{,}747-0{,}014n$.

Здесь $n=1, 2, 3, \ldots, 30$, т. е. соответствует номеру варианта.

Образец выполнения задания

1) $y=e^x$ при: а) $x_1=0{,}826$; б) $x_2=2{,}417$;
2) $y=\ln(1+x)$ при $x=0{,}437$;
3) $y=\sin x$ и $y=\cos x$ при: а) $x=0{,}476$; б) $x=0{,}684$.

---

1) Воспользуемся разложением

$$e^x=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_i\ldots,$$

где $u_0=1$, $u_i=\frac{x}{i}u_{i-1}$ $(i=1, 2, 3,\ldots)$.

Вычисление отдельных слагаемых продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $|u_i|<\varepsilon$, где $\varepsilon=10^{-6}$.

Составим таблицу значения отдельных слагаемых.

а) $x=0{,}826$

i	u_i	i	u_i
0	1	6	0,00044111
1	0,826	7	0,00005205
2	0,341138	8	0,00000537
3	0,09392666	9	0,00000049
4	0,01939586	10	0,00000004
5	0,003200420		

Искомое значение представляет собой следующую сумму:

$$e^{0,826}\approx\sum_{i=0}^{10}u_i=2{,}28416378\approx2{,}284164.$$

б) $x=2{,}417$

i	u_i	i	u_i
0	1	9	0,00775759
1	2,417	10	0,00187501
2	2,9209445	11	0,00041199
3	2,3533076	12	0,00008298
4	1,4219861	13	0,00001543
5	0,68738808	14	0,00000266
6	0,27690283	15	0,00000043
7	0,09561059		
8	0,02888635		

$$e^{2,417} \approx \sum_{i=0}^{16} u_i = 11,2121722 \approx 11,212172.$$

2) Воспользуемся равенством

$$\ln(1+x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_i + \ldots,$$

где $u_1 = x$, $u_i = -\dfrac{x(i-1)}{i} u_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Значения слагаемых занесем в таблицу

i	u_i	i	u_i
1	0,437	9	0,00006458
2	−0,0954845	10	−0,00002540
3	0,02781782	11	0,00001009
4	−0,00911729	12	−0,00000404
5	0,003187440	13	0,00000163
6	−0,00116075	14	−0,00000066
7	0,00043478	15	0,00000027
8	−0,00016625	16	−0,00000011
		17	0,00000005

$$\ln 1,437 \approx \sum_{i=1}^{17} u_i \approx 0,36255762 \approx 0,362558.$$

3) Будем использовать равенства

$$\sin x = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_i + \ldots,$$

где $u_0 = x$, $u_i = -\dfrac{x^2}{2i(2i+1)} u_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$;

$$\cos x = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_i + \ldots,$$

где $v_0 = 1$, $v_i = \dfrac{x^2}{2i(i-1)} v_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Составим таблицу значений слагаемых вида u_i и v_i.

а) $x = 0,476$

i	u_i	v_i
0	0,476	1
1	−0,01797503	−0,113288
2	0,00020364	0,00213903
3	−0,00000110	−0,00001615
4	0,000000003	0,00000007

Значит,

$$\sin 0,476 \approx \sum_{i=0}^{3} u_i = 0,45822751 \approx 0,458228;$$

$$\cos 0,476 \approx \sum_{i=0}^{4} v_i = 0,88883495 \approx 0,888835.$$

Для контроля правильности вычислений найдем сумму квадратов полученных значений:

$$\sin^2 0{,}476+\cos^2 0{,}476=0{,}2099729+0{,}79002766=1{,}0000006\approx 1.$$

Близость суммы к 1 свидетельствует о правильности вычислений.

б) $x=0{,}684$.

i	u_i	v_i
0	0,684	1
1	−0,05333558	−0,233928
2	0,00124767	0,00912038
3	−0,00001390	−0,00014223
4	0,00000009	0,00000119
5	—	−0,00000001

$$\sin 0{,}684\approx\sum_{i=0}^{4} u_i\approx 0{,}63189828\approx 0{,}631898;$$

$$\cos 0{,}684\approx\sum_{i=0}^{5} v_i\approx 0{,}7750513\approx 0{,}775051;$$

$$\sin^2 0{,}684+\cos^2 0{,}684=0{,}39929508+0{,}60070405=0{,}99999913\approx 1.$$

Работа 3

Задание. Вычислить значения функций при заданных значениях аргумента методом итераций с шестью верными значащими цифрами. Для определения начальных значений использовать метод прикидки. Выполнить проверку результата.

1) $y=\sqrt{x}$ при а) $x_1=7{,}86+1{,}27n$; б) $x_2=0{,}017+0{,}012n$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при а) $x_1=12{,}55+0{,}213n$; б) $x_2=0{,}247+0{,}022n$;

3) $y=\sqrt[3]{x}$ при а) $x_1=18{,}352+0{,}343n$; б) $x_2=0{,}037+0{,}024n$.

Здесь $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 30$, т. е. соответствует номеру варианта.

Образец выполнения задания

1) $y=\sqrt{x}$ при а) $x_1=14{,}76$; б) $x_2=0{,}142$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при а) $x_1=17{,}32$; б) $x_2=0{,}464$;

3) $y=\sqrt[3]{x}$ при а) $x_1=26{,}15$; б) $x_2=0{,}078$.

Для решения задачи методом итераций составляем последовательность приближенных значений искомой функции y_0, y_1, y_2, y_3, ..., y_i, ..., сходящуюся к точному значению $y(x)$. Вычисления продолжаем до сходимости с заданной точностью.

1) При вычислении значений функций $y(x)=\sqrt{x}$ члены последовательности определяем по формуле

$$y_{i+1}=\frac{1}{2}\left(y_i+\frac{x}{y_i}\right) \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где y_0 подбираем прикидкой с одной или двумя верными цифрами.

а) При $x=14{,}76$ имеем $y_{i+1}=\frac{1}{2}\left(y_i+\frac{14{,}76}{y_i}\right)$; пусть $y_0=3{,}8$. Составим таблицу значений членов последовательности:

i	y_0
0	3,8
1	3,842105
2	3,841874
3	3,841874

Искомым значением является $\sqrt{14{,}76}\approx y_3\approx 3{,}84187$.
Для проверки найдем квадрат полученного числа: $3{,}84187^2=14{,}759965\approx 14{,}76$.

б) При $x=0{,}142$ имеем $y_{i+1}=\frac{1}{2}\left(y_i+\frac{0{,}142}{y_i}\right)$; пусть $y_0=0{,}4$. Значения членов последовательности приведены в таблице:

i	y_i
0	0,4
1	0,3775
2	0,3768295
3	0,3768289
4	0,3768289

Искомое значение есть $\sqrt{0{,}142}\approx 0{,}376829$.
Проверка: $0{,}376829^2=0{,}1420001\approx 0{,}142$.

2) При вычислении значений функции $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ члены последовательности определяем по формуле

$$y_{i+1}=\frac{y_i}{2}(3-xy_i^2) \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

а) $x=17{,}32$; $y_0=0{,}24$; $y_{i+1}=\frac{y_i}{2}(3-17{,}32y_i^2)$.

Составим таблицу значений членов последовательности:

i	y_i
0	0,24
1	0,2402842
2	0,2402846
3	0,2402847

Искомым значением является $\frac{1}{\sqrt{17,32}} \approx 0,240285$. Для проверки воспользуемся равенством $xy^2=1$; имеем $17,32 \cdot 0,240285^2 = 1,0000028 \approx 1$.

б) $x=0,464$; $y_0=1,5$; $y_{i+1}=\frac{y_i}{2}(3-0,464y_i^2)$.

Составим таблицу:

i	y_i
0	1,5
1	1,464
2	1,468049
3	1,468051

Искомое значение есть $\frac{1}{\sqrt{0,464}} \approx 1,46805$.

Проверка: $0,464 \cdot 1,46805^2 = 0,99999925 \approx 1$.

3) Для вычисления значений функции $y=\sqrt[3]{x}$ члены последовательности определяем по формуле

$$y_{i+1}=\frac{1}{3}\left(2y_i+\frac{x}{y_i^2}\right) \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

а) $x=26,15$; $y=3$; $y_{i+1}=\frac{1}{3}\left(2y_i+\frac{26,15}{y_i^2}\right)$.

Составим таблицу значений членов последовательности:

i	y_i
0	3
1	2,968518
2	2,968182
3	2,968182

Искомым значением является $\sqrt[3]{26,15} \approx 2,96818$.

Для проверки воспользуемся равенством $y^3=x$; имеем $2,96818^3 = 26,14994 \approx 26,15$.

б) $x=0,078$, $y_0=0,4$, $y_{i+1}=\frac{1}{3}\left(2y+\frac{0,078}{y_i^2}\right)$.

Составим таблицу

i	y_i
0	0,4
1	0,4291667
2	0,4272743
3	0,4272659
4	0,4272659

Искомое значение есть $\sqrt[3]{0,078} \approx 0,427266$.

Проверка: $0,427266^3 = 0,07800007 \approx 0,078$.

ГЛАВА V

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа 1

Задание. 1) Отделить корни аналитически.
2) Отделить корни аналитически и уточнить один из них методом проб с точностью до 0,01.
3) Отделить корни графически.
4) Отделить корни графически и уточнить один из них методом проб с точностью до 0,01.

№ 1. 1) $2^x+5x-3=0$;
2) $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$;
3) $0{,}5^x+1=(x-2)^2$;
4) $(x-3)\cos x=1, \quad -2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

№ 2. 1) $\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{3x^3}=0$;
2) $2x^3-9x^2-60x+1=0$;
3) $[\log_2(-x)]\cdot(x+2)=-1$;
4) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-0{,}5x=0$.

№ 3. 1) $5^x+3x=0$;
2) $x^4-x-1=0$;
3) $x^2-2+0{,}5^x=0$;
4) $(x-1)^2\cdot\lg(x+11)=1$.

№ 4. 1) $2e^x=5x+2$
2) $2x^4-x^2-10=0$;
3) $x\cdot\log_3(x+1)=1$;
4) $\cos(x+0{,}5)=x^3$.

№ 5. 1) $3^{x-1}-2-x=0$;
2) $3x^4+8x^3+6x^2-10=0$;
3) $(x-4)^2\cdot\log_{0,5}(x-3)=-1$;
4) $5\sin x=x$.

№ 6. 1) $2\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2x^3}=0$;
2) $x^4-18x^2+6=0$;
3) $x^2\cdot 2^x=1$;
4) $\operatorname{tg} x=x+1 \quad -\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$.

№ 7. 1) $e^{-2x}-2x+1=0$;
2) $x^4+4x^3-8x^2-17=0$;
3) $0{,}5^x-1=(x+2)^2$;
4) $x^2\cos 2x=-1$.

№ 8. 1) $5^x-6x-3=0$;
2) $x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$;
3) $2x^2-0{,}5^x-3=0$;
4) $x\lg(x+1)=1$.

№ 9. 1) $\operatorname{arctg}(x-1)+2x=0$;
2) $3x^4+4x^3-12x^2+1=0$;
3) $(x-2)^2 2^x=1$;
4) $x^2-20\sin x=0$.

№ 10. 1) $2\operatorname{arcctg} x-x+3=0$;
2) $3x^4-8x^3-18x^2+2=0$;
3) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0{,}5x^2-1$;
4) $2\lg x-\dfrac{x}{2}+1=0$.

№ 11. 1) $3^x+2x-2=0$;
2) $2x^4-8x^3+8x^2-1=0$;
3) $[(x-2)^2-1]\,2^x=1$;
4) $(x-2)\cos x=1, \quad -2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

№ 12. 1) $2\operatorname{arctg} x-3x+2=0$;
2) $2x^4+8x^3+8x^2-1=0$;
3) $[\log_2(x+2)](x-1)=1$;
4) $\sin(x-0{,}5)-x+0{,}8=0$.

№ 13. 1) $3^x+2x-5=0$;
2) $x^4-4x^3-8x^2+1=0$;
3) $x^2-3+0{,}5^x=0$;
4) $(x-2)^2\lg(x+11)=1$.

№ 14. 1) $2e^x+3x+1=0$;
2) $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$;
3) $x\log_3(x+1)=2$;
4) $\cos(x+0{,}3)=x^2$.

№ 15. 1) $3^{x-1}-4-x=0$;
2) $2x^3-9x^2-60x+1=0$;
3) $(x-3)^2\log_{0,5}(x-2)=-1$;
4) $5\sin x=x-1$.

№ 16. 1) $\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{3x^3}=0$.
2) $x^4-x-1=0$;
3) $(x-1)^2 2^x=1$;
4) $\operatorname{tg}^3 x=x-1, \quad -\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$.

№ 17. 1) $e^x+x+1=0$;
2) $2x^4-x^2-10=0$;
3) $0{,}5^x-3=(x+2)^2$;
4) $x^2\cos 2x=-1, \quad -2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

№ 18. 1) $3^x-2x+5=0$;
2) $3x^4+8x^3+6x^2-10=0$;
3) $2x^2-0{,}5^x-2=0$;
4) $x\lg(x+1)=1$.

№ 19. 1) $\operatorname{arctg}(x-1)+3x-2=0$;
2) $x^4-18x^2+6=0$;
3) $(x-2)^2 2^x=1$;
4) $x^2-20\sin x=0$.

№ 20. 1) $2\operatorname{arcctg} x-x+3=0$;
2) $x^4+4x^3-8x^2-17=0$;
3) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=x^2-0{,}5$;
4) $2\lg x-\frac{x}{2}+1=0$.

№ 21. 1) $2^x-3x-2=0$;
2) $x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$;
3) $(0{,}5)^x+1=(x-2)^2$;
4) $(x-3)\cos x=1, \quad -2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

№ 22. 1) $\operatorname{arcctg} x+2x-1=0$;
2) $3x^4+4x^3-12x^2+1=0$;
3) $(x+2)\log_2(x)=1$;
4) $\sin(x+1)=0{,}5x$.

№ 23. 1) $3^x+2x-3=0$;
2) $3x^4-8x^3-18x^2+2=0$;
3) $x^2-4+0{,}5^x=0$;
4) $(x-2)^2\lg(x+11)=1$.

№ 24. 1) $2e^x-2x-3=0$;
2) $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$;
3) $x\log_3(x+1)=1$;
4) $\cos(x+0{,}5)=x^3$.

№ 25. 1) $3^x+2+x=0$;
2) $2x^3-9x^2-60x+1=0$;
3) $(x-4)^2\log_{0,5}(x-3)=-1$;
4) $5\sin x=x-0{,}5$.

№ 26. 1) $\operatorname{arcctg}(x-1)+2x-3=0$;
2) $x^4-x-1=0$;
3) $(x-1)^2 2^x=1$;
4) $\operatorname{tg}^3 x=x+1, \quad -\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2$.

№ 27. 1) $e^{-2x}-2x+1=0$;
2) $2x^4-x^2-10=0$;
3) $0{,}5^x-3=-(x+1)^2$;
4) $x^2\cos 2x=-1$.

№ 28. 1) $3^x-2x-5=0$;
2) $3x^4+8x^3+6x^2-10=0$;
3) $2x^2-0{,}5^x-3=0$;
4) $x\lg(x+1)=1$.

№ 29. 1) $\operatorname{arctg}(x-1)+2x=0$;
2) $x^4-18x^2+6=0$;
3) $(x-2)^2 2^x=1$;
4) $x^2-10\sin x=0$.

№ 30. 1) $3^x+5x-2=0$;
2) $3x^4+4x^3-12x^2+1=0$;
3) $0{,}5^x+1=(x-2)^2$;
4) $(x+3)\cos x=1$,
$-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Образец выполнения задания

1) $5^x-6x-3=0$; 2) $x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$;

3) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+x^2=3x-2$; 4) $x^2\log_{0,5}(x+1)=1$.

---

1) Обозначим $f(x)=5^x-6x-3$. Находим производную $f'(x)=5^x\ln 5-6$. Вычислим корень производной:

$$5^x\lg 5-6=0;\quad 5^x=\frac{6}{\ln 5};\quad x\lg 5=\lg 6-\lg(\ln 5);$$

$$x=\frac{\lg 6-\lg(\ln 5)}{\lg 5}=\frac{0{,}7782-0{,}2065}{0{,}6990}=\frac{0{,}5717}{0{,}6990}\approx 0{,}82.$$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным: а) критическим значениям функции (корням производной) или близким к ним;

б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного):

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	+	−	+

Так как происходят две перемены знака функции, то уравнение имеет два действительных корня. Чтобы завершить операцию отделения корней, следует уменьшить промежутки, содержащие корни, так чтобы их длина была не больше 1. Для этого составим новую таблицу знаков функции $f(x)$:

x	-1	0	1	2
$\operatorname{sign} f(x)$	+	−	−	+

Отсюда видно, что корни заключены в следующих промежутках: $x_1 \in [-1, 0]$; $x_2 \in [1, 2]$.

2) Полагая $f(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-3$, имеем $f'(x)=4x^3-3x^2-4x+3$. Найдем корни производной:

$$4x^3-3x^2-4x+3=0;\quad 4x(x^2-1)-3(x^2-1)=0;\quad (x^2-1)(4x-3)=0;\quad x_1=-1;$$
$$x_2=1;\quad x_3=3/4.$$

Составим таблицу знаков функций $f(x)$:

x	$-\infty$	1	3/4	1	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	+	−	−	−	+

Из таблицы видно, что уравнение имеет два действительных корня: $x_1 \in]-\infty, -1]$; $x_2 \in [1, +\infty[$.

Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

x	-2	-1	1	2
$\operatorname{sign} f(x)$	+	−	−	+

Следовательно, $x_1 \in [-2; -1]$; $x_2 \in [1, 2]$.

Уточним один из корней, например $x_1 \in [-2, -1]$, методом проб до сотых долей. Все вычисления удобно производить, используя следующую таблицу:

n	a_n^+	b_n^-	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	x_n^4	$-x_n^3$	$-2x_n^2$	$3x_n$	$f(x_n)$
0	−2	−1	−1,5	5,0625	3,375	−4,5	−4,5	−3,5625
1	−2	−1,5	−1,75	9,3789	5,3594	−6,125	−5,25	0,3633
2	−1,75	−1,5	−1,63	7,0591	4,3307	−5,3138	−4,89	−1,8140
3	−1,75	−1,63	−1,69	8,1573	4,8268	−5,7122	−5,07	−0,7981
4	−1,75	−1,69	−1,72	8,7521	5,0884	−5,9168	−5,16	−0,2363
5	−1,75	−1,72	−1,73	8,9575	5,1777	−5,9858	−5,19	−0,0406
6	−1,75	−1,73	−1,74	9,1664	5,2680	−6,0552	−5,22	0,1592
7	−1,74	−1,73						

Ответ: $x_1 \approx -1{,}73$.

3) Перепишем уравнение в виде $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-x^2+3x-2$. Обозначив $y_1=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $y_2=-x^2+3x-2$, построим графики этих функций (рис. 1).

Из графика видно, что уравнение имеет два корня: $x_1\approx 1{,}1$; $x_2\approx 2{,}9$.

4) Перепишем уравнение в виде $\log_{0,5}(x+1)=1/x^2$. Обозначив $y_1=\log_{0,5}(x+1)$, $y_2=1/x^2$, построим графики этих функций (рис. 2). Из графика видно, что уравнение имеет один корень $x_1\approx -0{,}8$.

Для уточнения этого корня методом проб выберем промежуток, на концах которого функция $f(x)=x^2\log_{0,5}(x+1)-1$ имеет разные знаки. Составим таблицу:

x	$-0{,}5$	$-0{,}8$
$\operatorname{sign} f(x)$	−	+

Для удобства расчетов перейдем к десятичным логарифмам:

$$f(x)=x^2\frac{\lg(x+1)}{\lg 0{,}5}-1=x^2\frac{\lg(x+1)}{-0{,}301}-1.$$

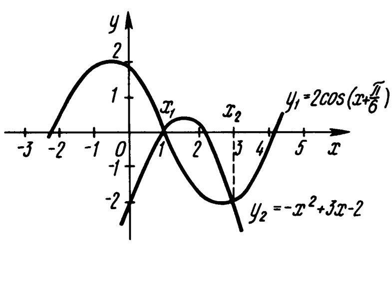


Рис. 1

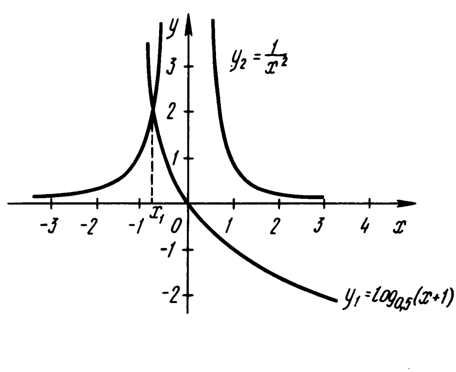


Рис. 2

Дальнейшие вычисления производим в таблице:

n	a_n^+	b_n^-	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	x_n^2	$\lg(x_n+1)$	$f(x_n)$
0	$-0,8$	$-0,5$	$-0,65$	0,4225	$-0,4559$	$-0,360$
1	$-0,8$	$-0,65$	$-0,73$	0,5329	$-0,5686$	0,0067
2	$-0,73$	$-0,65$	$-0,69$	0,4761	$-0,5086$	$-0,196$
3	$-0,73$	$-0,69$	$-0,71$	0,5041	$-0,5376$	$-0,099$
4	$-0,73$	$-0,71$	$-0,72$	0,5184	$-0,5528$	$-0,048$
5	$-0,73$	$-0,72$				

Ответ: $x \approx -0,73$.

Работа 2

Задание. 1) Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001.

2) Отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0,001.

№ 1. 1) $x-\sin x=0,25$; 2) $x^3-3x^2+9x-8=0$.
№ 2. 1) $\operatorname{tg}(0,58x+0,1)=x^2$; 2) $x^3-6x-8=0$.
№ 3. 1) $\sqrt{x}-\cos(0,387x)=0$; 2) $x^3-3x^2+6x+3=0$.
№ 4. 1) $\operatorname{tg}(0,4x+0,4)=x^2$; 2) $x^3-0,1x^2+0,4x-1,5=0$.
№ 5. 1) $\lg x-\frac{7}{2x+6}=0$; 2) $x^3-3x^2+9x+2=0$.
№ 6. 1) $\operatorname{tg}(0,5x+0,2)=x^2$; 2) $x^3+x-5=0$.
№ 7. 1) $3x-\cos x-1=0$; 2) $x^3+0,2x^2+0,5x-1,2=0$.
№ 8. 1) $x+\lg x=0,5$; 2) $x^3+3x+1=0$.
№ 9. 1) $\operatorname{tg}(0,5x+0,1)=x^2$; 2) $x^3+0,2x^2+0,5x-2=0$.
№ 10. 1) $x^2+4\sin x=0$; 2) $x^3-3x^2+12x-9=0$.
№ 11. 1) $\operatorname{ctg} 1,05x-x^2=0$; 2) $x^3-0,2x^2+0,3x-1,2=0$.
№ 12. 1) $\operatorname{tg}(0,4x+0,3)=x^2$; 2) $x^3-3x^2+6x-2=0$.
№ 13. 1) $x\lg x-1,2=0$; 2) $x^3-0,1x^2+0,4x-1,5=0$.
№ 14. 1) $1,8x^2-\sin 10x=0$; 2) $x^3+3x^2+6x-1=0$.
№ 15. 1) $\operatorname{ctg} x-\frac{x}{4}=0$; 2) $x^3+0,1x^2+0,4x-1,2=0$.
№ 16. 1) $\operatorname{tg}(0,3x+0,4)=x^2$; 2) $x^3+4x-6=0$.
№ 17. 1) $x^2-20\sin x=0$; 2) $x^3+0,2x^2+0,5x+0,8=0$.
№ 18. 1) $\operatorname{ctg} x-\frac{x}{3}=0$; 2) $x^3-3x^2+12x-12=0$.
№ 19. 1) $\operatorname{tg}(0,47x+0,2)=x^2$; 2) $x^3-0,2x^2+0,3x+1,2=0$.
№ 20. 1) $x^2+4\sin x=0$; 2) $x^3-2x+4=0$.
№ 21. 1) $\operatorname{ctg} x-\frac{x}{2}=0$; 2) $x^3-0,2x^2+0,5x-1,4=0$.
№ 22. 1) $2x-\lg x-7=0$; 2) $x^3-3x^2+6x-5=0$.
№ 23. 1) $\operatorname{tg}(0,44x+0,3)=x^2$; 2) $x^3-0,1x^2+0,4x+1,2=0$.
№ 24. 1) $3x-\cos x-1=0$; 2) $x^3-0,2x^2+0,5x-1=0$.
№ 25. 1) $\operatorname{ctg} x-\frac{x}{10}=0$; 2) $x^3+3x^2+12x+3=0$.

№ 26. 1) $x^2+4\sin x=0$; 2) $x^3-0{,}1x^2+0{,}4x+2=0$.
№ 27. 1) $\operatorname{tg}(0{,}36x+0{,}4)=x^2$; 2) $x^3-0{,}2x^2+0{,}4x-1{,}4=0$.
№ 28. 1) $x+\lg x=0{,}5$; 2) $x^3+0{,}4x^2+0{,}6x-1{,}6=0$.
№ 29. 1) $\operatorname{ctg} x-\frac{x}{5}=0$; 2) $x^3+x-3=0$.
№ 30. 1) $2\lg x-\frac{x}{2}+1=0$; 2) $x^3-0{,}2x^2+0{,}5x+1{,}4=0$.

Образец выполнения задания

1) $\operatorname{tg}(0{,}55x+0{,}1)=x^2$; 2) $x^3-0{,}2x^2+0{,}5x+1{,}5=0$.

1) Отделим корень графически. Построим графики функций $y_1=\operatorname{tg}(0{,}55x+0{,}1)$ и $y_2=x^2$ (рис. 3), составив таблицы значений этих функций:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y_2=x^2$	0	0,04	0,16	0,36	0,64	1
$0{,}55x$	0	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55
y_1	0,1	0,21	0,33	0,46	0,60	0,76

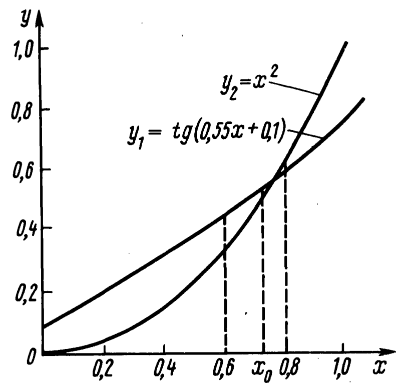


Рис. 3

Таким образом, положительный корень уравнения заключен в промежутке $[0{,}6;\ 0{,}8]$.

Чтобы уточнить корень методом хорд, определим знаки функции $f(x)=\operatorname{tg}(0{,}55x+0{,}1)-x^2$ на концах промежутка $[0{,}6;\ 0{,}8]$ и знак ее второй производной в этом промежутке:

$$f(0{,}6)=\operatorname{tg}0{,}43-0{,}36=0{,}4586-0{,}36=0{,}0986;\quad f(0{,}8)=\operatorname{tg}0{,}54-0{,}64=$$
$$=0{,}5994-0{,}64=-0{,}0406;$$
$$f'(x)=\frac{0{,}55}{\cos^2(0{,}55x+0{,}1)}-2x;$$
$$f''(x)=0{,}55\cdot 2\cos^3(0{,}55x+0{,}1)\sin(0{,}55x+0{,}1)\,0{,}55-2=$$
$$=\frac{0{,}605\sin(0{,}55x+0{,}1)}{\cos^3(0{,}55x+0{,}1)}-2<0 \text{ при } x\in[0{,}6;\ 0{,}8].$$

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}\cdot(b-x_n),$$

где $b=0{,}8$; $x_0=0{,}6$.

Вычисления удобно располагать в таблице:

n	x_n	$0{,}8-x_n$	$0{,}55x_n+0{,}1$	$\operatorname{tg}(0{,}55x_n+0{,}1)$
0	0,6	0,2	0,43	0,4586
1	0,742	0,058	0,5081	0,5570
2	0,750	0,50	0,5125	0,5627
3	0,7502	0,0498	0,5126	0,5628

n	x_n^2	$f(x_n)$	$f(0{,}8)-f(x_n)$	$h=\dfrac{f(x_n)}{f(0{,}8)-f(x_n)}\times(b-x_n)$
0	0,36	0,0986	−0,1392	−0,142
1	0,5506	0,0064	−0,0470	−0,008
2	0,5625	0,0002	−0,0408	−0,0002
3	0,5628	0		

Ответ: $x=0{,}750$.

2) Отделим корни аналитически. Находим

$f(x)=x^3-0{,}2x^2+0{,}5x+1{,}5$; $f'(x)=3x^2-0{,}4x+0{,}5$; $D=0{,}16-6<0$.

Составим таблицу знаков функции $f(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	−	−	+	+

Уравнение имеет один действительный корень, лежащий в промежутке $[-1, 0]$.

Чтобы уточнить корень, находим вторую производную $f''(x)=6x-0{,}4$; в промежутке $[-1, 0]$ выполняется неравенство $f''(x)<0$.

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1}=a-\frac{f(a)}{f(x_n)-f(a)}(x_n-a),$$

где $a=-1$; $x_0=0$; $f(a)=f(-1)=-1-0{,}2-0{,}5+1{,}5=-0{,}2$.

Вычисления располагаем в таблице:

n	x_n	x_n^3	x_n^2	$0{,}2x_n^2$	$0{,}5x_n$
0	0	0	0	0	0
1	−0,882	−0,6861	0,7779	0,1556	−0,441
2	−0,943	−0,8386	0,8892	0,1778	−0,4715
3	−0,946	−0,8466	0,8949	0,1790	−0,473
4	−0,946				

n	$f(x_n)$	$f(x_n)+0,2$	x_n-a	$\frac{f(a)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$
0	1,5	1,7	1	$-0,118$
1	0,2173	0,4173	0,118	$-0,057$
2	0,0121	0,2121	0,057	$-0,054$
3	0,0014	0,2014	0,054	$-0,054$

Ответ: $x \approx -0,946$.

Работа 3

Задание. 1) Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0,001.

2) Отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них с точностью до 0,001 методом касательных.

Воспользоваться вариантами работы 2.

Образец выполнения задания

1) $\operatorname{tg}(0,55x+0,1)=x^2$; 2) $x^3-0,2x^2+0,5x+1,5=0$.

1) Выше (см. с. 00) мы отделили один из корней этого уравнения и установили, что он заключен в промежутке [0,6; 0,8]. Уточним этот корень методом касательных. Так как $f(0,6)>0$; $f(0,8)<0$ и $f''(x)<0$, то за начальное приближение примем $x_0=0,8$.

Вычисления производим по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Предварительно найдем

$$f'(0,8)=\frac{0,55}{\cos^2(0,44+0,1)}-2\cdot 0,8=\frac{0,55}{0,85772}-1,6=\frac{0,55}{0,7356}-1,6=$$

$$=0,7477-1,6=-0,8523.$$

Составим таблицу:

n	x_n	x_n^2	$0,55x_n+0,1$	$\operatorname{tg}(0,55x_n+0,1)$	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{-0,8523}$
0	0,8	0,64	0,54	0,5994	$-0,0406$	0,0476
1	0,7524	0,5661	0,5138	0,5643	$-0,0018$	0,0021
2	0,7503	0,5630	0,5127	0,5630	$-0,0000$	0

Ответ: $x \approx 0,750$.

2) Выше (см. с. 00) мы установили, что уравнение имеет действительный корень, принадлежащий промежутку $[-1, 0]$. Уточним этот

корень методом касательных. Так как $f(-1)<0$, $f(0)>0$ и $f''(x)<0$, то за начальное приближение принимаем $x_0=-1$.

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Находим $f(x)=x^3-0{,}2x^2+0{,}5x+1{,}5$; $f'(x)=3x^2-0{,}4x+0{,}5$. Для вычислений используем таблицу:

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-1	1	-1	$-0{,}2$	3,9	$-0{,}051$
1	$-0{,}949$	0,9006	$-1{,}8547$	$-0{,}0093$	3,5814	$-0{,}0026$
2	$-0{,}9464$	0,8957	$-0{,}8477$	$-0{,}0004$	3,5657	$-0{,}00001$

Ответ: $x\approx-0{,}946$.

Работа 4

Задание. Комбинированным методом хорд и касательных решить уравнение третьей степени, вычислив корни с точностью до 0,001.

№ **1.** $2x^3-3x^2-12x-5=0$.
№ **2.** $x^3-3x^2-24x-3=0$.
№ **3.** $x^3-3x^2+3=0$.
№ **4.** $x^3-12x+6=0$.
№ **5.** $x^3+3x^2-24x-10=0$.
№ **6.** $2x^3-3x^2-12x+10=0$.
№ **7.** $2x^3+9x^2-21=0$.
№ **8.** $x^3-3x^2+2{,}5=0$.
№ **9.** $x^3+3x^2-2=0$.
№ **10.** $x^3+3x^2-3{,}5=0$.
№ **11.** $x^3+3x^2-24x+10=0$.
№ **12.** $x^3-3x^2-24x-8=0$.
№ **13.** $2x^3+9x^2-10=0$.
№ **14.** $x^3-12x+10=0$.
№ **15.** $x^3+3x^2-3=0$.
№ **16.** $2x^3-3x^2-12x+1=0$.
№ **17.** $x^3-3x^2-24x-5=0$.
№ **18.** $x^3-4x^2+2=0$.
№ **19.** $x^3-12x-5=0$.
№ **20.** $x^3+3x^2-24x+1=0$.
№ **21.** $2x^3-3x^2-12x+12=0$.
№ **22.** $2x^3+9x^2-6=0$.
№ **23.** $x^3-3x^2+1{,}5=0$.
№ **24.** $x^3-3x^2-24x+10=0$.
№ **25.** $x^3+3x^2-24x-3=0$.
№ **26.** $x^3-12x-10=0$.
№ **27.** $2x^3+9x^2-4=0$.
№ **28.** $2x^3-3x^2-12x+8=0$.
№ **29.** $x^3+3x^2-1=0$.
№ **30.** $x^3-3x^2+3{,}5=0$.

Образец выполнения задания

$$x^3-2x^2-4x+7=0.$$

Отделим корни аналитически. Находим

$$f(x)=x^3-2x^2-4x+7,\ f'(x)=3x^2-4x-4;$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\frac{2\pm4}{3};\ x_1=-\frac{2}{3};\ x_2=2.$$

Составим таблицу знаков функций $f(x)$:

x	$-\infty$	$-2/3$	2	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Итак, уравнение имеет три действительных корня: $x_1 \in]-\infty, -2/3]$; $x_2 \in [-2/3, 2]$; $x_3 \in [2, +\infty[$.

Уменьшим промежутки, содержащие корни, до длины, равной 1:

x	-2	-1	0	1	2	3
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$

Значит, $x_1 \in [-2, -1]$; $x_2 \in [1, 2]$; $x_3 \in [2, 3]$.

Уточним корни комбинированным методом хорд и касательных.

1. $x_1 \in [-2, -1]$; $f(-2)<0$; $f(-1)>0$; $f''(x)=6x-4$. При $-2 \leqslant x \leqslant -1$ имеем $f''(x)<0$. Для расчетов применяем формулы

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad \bar{x}_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n)-f(x_n)}(\bar{x}_n-x_n), \qquad (*)$$

где x_n и $\bar{x}_n$ — значения корня соответственно по недостатку и избытку. Полагаем $x_0=-2$; $\bar{x}_0=-1$.

Все вычисления производим в таблице, обозначив

$$h_{1n}=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad h_{2n}=\frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n)-f(x_n)}\cdot(\bar{x}_n-x_n).$$

n	x_n / $\bar{x}_n$	$\bar{x}_n-x_n$	x_n^2 / $\bar{x}_n^2$	x_n^3 / $\bar{x}_n^3$	$f(x_n)$ / $f(\bar{x}_n)$	$f'(x_n)$	$f(\bar{x}_n)-f(x_n)$	h_{1n} / h_{2n}
0	-2	1	4	-8	-1	16	9	$-0{,}06$
	-1		1	-1	8			$-0{,}11$
1	$-1{,}94$	0,05	3,7636	$-7{,}3014$	$-0{,}0686$	15,0508	0,7331	$-0{,}0045$
	$-1{,}89$		3,5721	$-6{,}7513$	0,6645			$-0{,}0047$
2	$-1{,}9355$	0,0002	3,7462	$-7{,}2507$	$-0{,}0011$	—	—	—
	$-1{,}9353$		3,7454	$-7{,}2484$	0,0020			—

Ответ: $x_1 \approx -1{,}935$.

2. $x_2 \in [1, 2]$; $f(1)>0$; $f(2)<0$; $f''(x)>0$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$. Для расчетов применяем те же формулы (*), полагая $x_0=1$, $\bar{x}_0=2$.

Вычисления производим в таблице:

n	x_n / $\bar{x}_n$	$\bar{x}_n - x_n$	x_n^2 / $\bar{x}_n^2$	x_n^3 / $\bar{x}_n^3$	$f(x_n)$ / $f(\bar{x}_n)$	$f'(x_n)$	$f(\bar{x}_n)-f(x_n)$	h_{1n} / h_{2n}
0	1	1	1	1	2	−5	−3	−0,4
	2		4	8	−1			−0,7
1	1,4	0,3	1,96	2,744	0,224	−3,72	−0,891	−0,060
	1,7		2,89	4,913	−0,667			−0,075
2	1,46	0,015	2,1316	3,1121	0,0089	−3,4452	−0,0511	−0,0025
	1,475		2,1756	3,2090	−0,0422			−0,0026
3	1,4625	0,0001	2,1389	3,1282	0,0004			
	1,4626		2,1392	3,1288	0			

Ответ: $x_2 \approx 1{,}463$.

3. $x_3 \in [2, 3]$; $f(2) < 2$; $f(3) > 0$; $f''(x) > 0$ при $2 \leqslant x \leqslant 3$. Для расчетов применяем формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} \cdot (\bar{x}_n - x_n); \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)},$$

где $x_0 = 2$, $\bar{x}_0 = 3$.

Вычисления производим в таблице, обозначив

$$h_{1n} = \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} \cdot (\bar{x}_n - x_n); \quad h_{2n} = \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}.$$

n	x_n / $\bar{x}_n$	$\bar{x}_n - x_n$	x_n^2 / $\bar{x}_n^2$	x_n^3 / $\bar{x}_n^3$	$f(x_n)$ / $f(\bar{x}_n)$	$f(\bar{x}_n)-f(x_n)$	$f'(x_n)$	h_{1n} / h_{2n}
0	2	1	4	8	−1	5	11	−0,20
	3		9	27	4			0,36
1	2,2	0,44	4,84	10,648	−0,832	1,7325	6,3488	−0,126
	2,64		6,9696	18,3997	−0,9005			0,142
2	2,326	0,172	5,4103	12,8430	−0,2816	0,3971	4,728	−0,122
	2,498		6,2400	15,5875	0,1155			0,024
3	2,448	0,026	5,9927	14,6701	−0,1073	0,1125	4,4661	−0,0248
	2,474		6,1207	15,1426	0,0052			0,0012
4	2,4728	0						
	2,4728							

Ответ: $x_3 \approx 2{,}473$.

Работа 5

Задание. 1) Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0,001.

2) Отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0,001.

№ 1.	1) $\ln x+(x+1)^3=0$;	2) $x^3+2x^2+2=0$.
№ 2.	1) $x\cdot 2^x=1$;	2) $x^3-3x^2+9x-10=0$.
№ 3.	1) $\sqrt{x+1}=\frac{1}{x}$;	2) $x^3-2x+2=0$.
№ 4.	1) $x-\cos x=0$;	2) $x^3+3x-1=0$.
№ 5.	1) $3x+\cos x+1=0$;	2) $x^3+x-3=0$.
№ 6.	1) $x+\ln x=0{,}5$;	2) $x^3+0{,}4x^2+0{,}6x-1{,}6=0$.
№ 7.	1) $2-x=\ln x$;	2) $x^3-0{,}2x^2+0{,}4x-1{,}4=0$.
№ 8.	1) $(x-1)^2=\frac{1}{2}e^x$;	2) $x^3-0{,}1x^2+0{,}4x+2=0$.
№ 9.	1) $(2-x)e^x=0{,}5$;	2) $x^3+3x^2+12x+3=0$.
№ 10.	1) $2{,}2x-2^x=0$;	2) $x^3-0{,}2x^2+0{,}5x-1=0$.
№ 11.	1) $x^2+4\sin x=0$;	2) $x^3-0{,}1x^2+0{,}4x+1{,}2=0$.
№ 12.	1) $2x-\lg x=7$;	2) $x^3-3x^2+6x-5=0$.
№ 13.	1) $5x-8\ln x=8$;	2) $x^3-0{,}2x^2+0{,}5x-1{,}4=0$.
№ 14.	1) $3x-e^x=0$;	2) $x^3+2x+4=0$.
№ 15.	1) $x(x+1)^2=1$;	2) $x^3-3x^2+12x-12=0$.
№ 16.	1) $x=(x+1)^3$;	2) $x^3+0{,}2x^2+0{,}5x+0{,}8=0$.
№ 17.	1) $x^2=\sin x$;	2) $x^3+4x-6=0$.
№ 18.	1) $x^3=\sin x$;	2) $x^3+0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}2=0$.
№ 19.	1) $x=\sqrt{\lg(x+2)}$;	2) $x^3+3x^2+6x-1=0$.
№ 20.	1) $x^2=\ln(x+1)$;	2) $x^3-0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}5=0$.
№ 21.	1) $2x+\lg x=-0{,}5$;	2) $x^3-3x^2+6x-2=0$.
№ 22.	1) $2x+\cos x=0{,}5$;	2) $x^3-0{,}2x^2+0{,}3x-1{,}2=0$.
№ 23.	1) $\sin 0{,}5x+1=x^2$; $x>0$;	2) $x^3-3x^2+12x-9=0$.
№ 24.	1) $0{,}5x+\lg(x-1)=0{,}5$;	2) $x^3+0{,}2x^2+0{,}5x-2=0$.
№ 25.	1) $\sin(0{,}5+x)=2x-0{,}5$;	2) $x^3+3x+1=0$.
№ 26.	1) $\lg(2+x)+2x=3$;	2) $x^3+0{,}2x^2+0{,}5x-1{,}2=0$.
№ 27.	1) $\lg(1+2x)=2-x$;	2) $x^3-3x^2+9x+2=0$.
№ 28.	1) $2\sin(x-0{,}6)=1{,}5-x$;	2) $x^3-0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}5=0$.
№ 29.	1) $x+\lg(1+x)=1{,}5$;	2) $x^3-3x^2+6x+3=0$.
№ 30.	1) $x+\cos x=1$;	2) $x^3-0{,}1x^2+0{,}3x-0{,}6=0$.

Образец выполнения задания

1) $2x+\lg(2x+3)=1$; 2) $x^3-2x^2+7x+3=0$.

---

1) Найдем приближенные значения корней графически; для этого уравнение удобно представить в виде $\lg(2x+3)=1-2x$ (рис. 4). Из графика видно, что уравнение имеет один корень, лежащий в промежутке $[0; 0{,}5]$. Для уточнения его методом итераций приведем уравнение к виду $x=\varphi(x)$.

Функцию $\varphi(x)$ будем искать из соотношения $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{k}$, считая, что $|k|\geqslant Q/2$, где $Q=\max|f'(x)|$; число k имеет тот же знак, что и $f'(x)$ в промежутке $[0;\ 0{,}5]$.

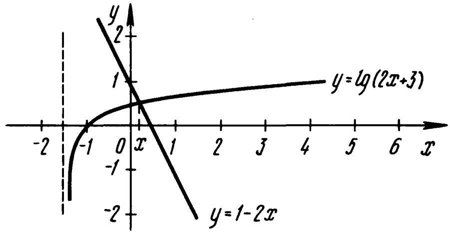


Рис. 4

Находим

$$f(x)=2x+\lg(2x+3)-1;$$

$$f'(x)=2+\frac{0{,}8686}{2x+3};$$

$$Q=\max_{[0;\ 0{,}5]}f'(x)=2+\frac{0{,}8686}{2\cdot 0+3}\approx 2{,}2895;\quad f'(x)>0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 0{,}5.$$

Примем $k=2$, тогда

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{2}=x-x-\frac{\lg(2x+3)}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lg(2x+3).$$

За начальное приближение возьмем $x_0=0$, все остальные приближения будем определять из равенства

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lg(2x_n+3).$$

Вычисления удобно располагать в таблице:

n	x_n	$2x_n+3$	$\lg(2x_n+3)$	$\frac{1}{2}\lg(2x_n+3)$
0	0	3	0,4771	0,2386
1	0,2614	3,5228	0,5469	0,2734
2	0,2266	3,4532	0,5382	0,2691
3	0,2309	3,4618	0,5394	0,2697
4	0,2303	3,4606	0,5392	0,2696
5	0,2304			

Ответ: $x\approx 0{,}230$.

2. Отделяем корни аналитически. Находим

$$f(x)=x^3-2x^2+7x+3;\quad f'(x)=3x^2-4x+7;\quad D=4-21\cdot 4<0.$$

Составим таблицу:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Уравнение имеет действительный корень, лежащий в промежутке $[-1,\ 0]$.

Приведем уравнение к виду $x=\varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)|<1$ при $-1\leqslant x\leqslant 0$. Так как $Q=\max\limits_{[-1,\ 0]}|f'(x)|=f'(-1)=3+4+7=14$, то можно взять $k=10$. Тогда

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{k}=x-0{,}1x^3+0{,}2x^2-0{,}7x-0{,}3=-0{,}1x^3+0{,}2x^2+0{,}3x-0{,}3.$$

Пусть $x_0=0$, тогда $x_{n+1}=\varphi(x_n)$. Вычисления располагаем в таблице:

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$\varphi(x_n)$
0	0	0	0	−0,3
1	−0,3	0,09	−0,027	−0,3693
2	−0,3693	0,1364	−0,0504	−0,3785
3	−0,3785	0,1433	−0,0542	−0,3795
4	−0,3795	0,1440	−0,0546	−0,3796
5	−0,3796			

Ответ: $x\approx-0{,}380$.

Работа 6

Задание. 1) Используя метод итераций, решить систему нелинейных уравнений с точностью до 0,001.

2) Используя метод Ньютона, решить систему нелинейных уравнений с точностью до 0,001.

№ 1. 1) $\begin{cases}\sin(x+1)-y=1{,}2;\\ 2x+\cos y=2.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{tg}(xy+0{,}4)=x^2;\\ 0{,}6x^2+2y^2=1,\ x>0,\ y>0.\end{cases}$

№ 2. 1) $\begin{cases}\cos(x-1)+y=0{,}5;\\ x-\cos y=3.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}6x=0;\\ x^2+y^2=1,\ x>0,\ y>0.\end{cases}$

№ 3. 1) $\begin{cases}\sin x+2y=2;\\ \cos(y-1)+x=0{,}7.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{tg}(xy+0{,}1)=x^2;\\ x^2+2y^2=1.\end{cases}$

№ 4. 1) $\begin{cases}\cos x+y=1{,}5;\\ 2x-\sin(y-0{,}5)=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}2x=0{,}2;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

№ 5. 1) $\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1;\\ \cos(y-2)+x=0.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{tg}(xy+0{,}3)=x^2;\\ 0{,}9x^2+2y^2=1.\end{cases}$

№ 6. 1) $\begin{cases}\cos(x+0{,}5)+y=0{,}8;\\ \sin y-2x=1{,}6.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}3x=0;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

№ 7. 1) $\begin{cases}\sin(x-1)=1{,}3-y;\\ x-\sin(y+1)=0{,}8.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{tg}xy=x^2;\\ 0{,}8x^2+2y^2=1.\end{cases}$

№ 8. 1) $\begin{cases}2y-\cos(x+1)=0;\\ x+\sin y=-0{,}4.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}5x=0{,}1;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

№ 9. 1) $\begin{cases}\cos(x+0{,}5)-y=2;\\ \sin y-2x=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{tg}xy=x^2;\\ 0{,}7x^2+2y^2=1.\end{cases}$

№ 10. 1) $\begin{cases}\sin(x+2)-y=1{,}5;\\ x+\cos(y-2)=0{,}5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}2x=0{,}1;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

№ 11. 1) $\begin{cases}\sin(y+1)-x=1{,}2;\\ 2y+\cos x=2.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{tg}(xy+0{,}2)=x^2;\\ 0{,}6x^2+2y^2=1.\end{cases}$

№ 12. 1) $\begin{cases}\cos(y-1)+x=0{,}5;\\ y-\cos x=3.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin(x+y)=1{,}5x-0{,}1;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

№ 13. 1) $\begin{cases}\sin y+2x=2;\\ \cos(x-1)+y=0{,}7.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{tg}(xy+0{,}4)=x^2;\\ 0{,}8x^2+2y^2=1.\end{cases}$

№ 14. 1) $\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5; \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) = 1{,}2x - 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

№ 15. 1) $\begin{cases} \sin(y+0{,}5) - x = 1; \\ \cos(x-2) + y = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0{,}1) = x^2; \\ 0{,}9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

№ 16. 1) $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) + x = 0{,}8; \\ \sin x - 2y = 1{,}6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}4x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

№ 17. 1) $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3; \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0{,}1) = x^2; \\ 0{,}5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

№ 18. 1) $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0; \\ y + \sin x = -0{,}4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) = 1{,}1x - 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

№ 19. 1) $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) - x = 2; \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(x-y) - xy = 0; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

№ 20. 1) $\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1{,}5; \\ y + \cos(x-2) = 0{,}5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x-y) - xy = -1; \\ x^2 - y^2 = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

№ 21. 1) $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0{,}2) = x^2; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

№ 22. 1) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}8; \\ x - \cos y = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}5x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

№ 23. 1) $\begin{cases} \sin x + 2y = 1{,}6; \\ \cos(y-1) + x = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2; \\ 0{,}5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

№ 24. 1) $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}2; \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) = 1{,}2x - 0{,}2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

№ 25. 1) $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1{,}2; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0{,}1) = x^2; \\ 0{,}7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

№ 26. 1) $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 1; \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}5x = 0{,}2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

№ 27. 1) $\begin{cases} \sin(x-1) + y = 1{,}5; \\ x - \sin(y+1) = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2; \\ 0{,}6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

№ 28. 1) $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}2x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

№ 29. 1) $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}8; \\ y - \cos x = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0{,}3) = x^2; \\ 0{,}5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

№ 30. 1) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 1; \\ \sin y + 2x = 1{,}6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}1x = 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Образец выполнения задания

1) $\begin{cases} \sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6; \\ 3x - \cos y = 0{,}9. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(2x-y) - 1{,}2x = 0{,}4. \\ 0{,}8x^2 + 1{,}5y^2 = 1. \end{cases}$

---

1) Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} y = \sin(x-0{,}6) - 1{,}6; \\ x = \dfrac{1}{3}\cos y + 0{,}3. \end{cases}$$

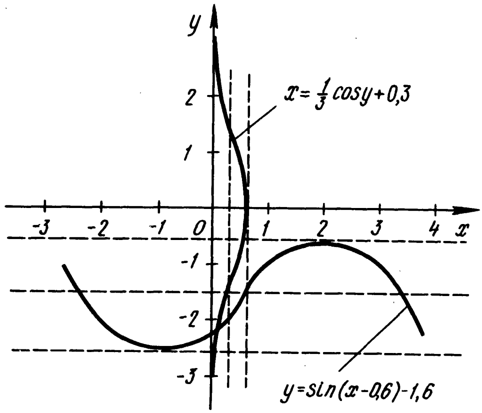


Рис. 5

Отделение корней производим графически (рис. 5). Из графика видим, что система имеет одно решение, заключенное в области D: $0<x<0{,}3$; $-2{,}2<y<-1{,}8$.

Убедимся в том, что метод итераций применим для уточнения решения системы, для чего запишем ее в следующем виде:

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,\ y)=\frac{1}{3}\cos y+0{,}3; \\ y=\varphi_2(x,\ y)=\sin(x-0{,}6)-1{,}6. \end{cases}$$

Так как $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\cos(x-0{,}6)$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=-\frac{1}{3}\sin y$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0$, то в области D имеем

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|=|\cos(x-0{,}6)|\leqslant\cos 0{,}3=0{,}2955<1;$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|=\left|-\frac{1}{3}\sin y\right|\leqslant\left|\frac{1}{3}\sin(-1{,}8)\right|<1.$$

Таким образом, условия сходимости выполняются.

Вычисления производим по формулам

$$\begin{cases} x_{n+1}=\frac{1}{3}\cos y_n+0{,}3; \\ y_{n+1}=\sin(x_n-0{,}6)-1{,}6. \end{cases}$$

За начальные приближения принимаем $x_0=0{,}15$, $y_0=-2$.

n	x_n	y_n	$x_n-0{,}6$	$\sin(x_n-0{,}6)$	$\cos y_n$	$\frac{1}{3}\cos y_n$
0	0,15	−2	−0,45	−0,4350	−0,4161	−0,1384
1	0,1616	−2,035	−0,4384	−0,4245	−0,4477	−0,1492
2	0,1508	−2,0245	−0,4492	−0,4342	−0,4382	−0,1461
3	0,1539	−2,0342	−0,4461	−0,4313	−0,4470	−0,1490
4	0,1510	−2,0313	−0,4490	−0,4341	−0,4444	−0,1481
5	0,1519	−2,0341	−0,4481	−0,4333	−0,4469	−0,1490
6	0,1510	−2,0333	−0,449	−0,4341	−0,4462	−0,1487
7	0,1513	−2,0341	−0,4487	−0,4340	−0,4469	−0,1490
8	0,1510	−2,0340				

Ответ: $x\approx 0{,}151$; $y\approx -2{,}034$.

2) Отделение корней производим графически (рис. 6). Для построения графиков функций составим таблицу значений функций y_1 и y_2, входящих в первое и второе уравнения (табл. I).

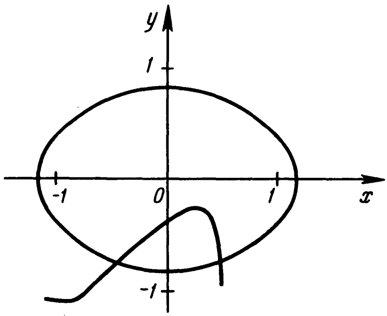


Рис. 6

Таблица I

x	$-1,1$	-1	$-0,8$	$-0,6$	$-0,2$	$-0,4$	0	$0,2$	$0,4$	$0,5$
x^2	1,21	1	0,64	0,36	0,04	0,16	0	0,04	0,16	0,25
$0,8x^2$	0,97	0,8	0,51	0,29	0,032	0,13	0	0,032	0,13	0,2
$1-0,8x^2$	0,03	0,2	0,49	0,71	0,97	0,87	1	0,97	0,87	0,8
$\frac{1-0,8x^2}{1,5}$	0,02	0,13	0,33	0,47	0,65	0,58	0,67	0,65	0,58	0,53
y_2	$\pm 0,14$	$\pm 0,36$	$\pm 0,57$	$\pm 0,69$	$\pm 0,81$	$\pm 0,76$	$\pm 0,82$	$\pm 0,81$	$\pm 0,76$	$\pm 0,73$
$1,2x$	$-1,32$	$-1,2$	$-0,96$	$-0,72$	$-0,24$	$-0,48$	0	0,24	0,48	0,6
$0,4+1,2x$	$-0,92$	$-0,8$	$-0,56$	$-0,32$	0,16	$-0,08$	0,4	0,64	0,88	1
$2x-y$	$-1,17$	$-0,93$	$-0,59$	$-0,33$	0,16	$-0,08$	0,41	0,69	2,06 1,08	1,57
y_1	$-1,03$	$-1,07$	$-1,01$	$-0,87$	$-0,56$	$-0,72$	$-0,41$	$-0,29$	$-1,26$ $-1,28$	$-0,57$

Значения для x можно брать исходя из следующих условий: из первого уравнения $-1 \leqslant 1,2x+0,4 \leqslant 1$, т. е. $-1,16 \leqslant x \leqslant 0,5$; из второго уравнения $-\sqrt{1,25} \leqslant x \leqslant \sqrt{1,25}$, т. е. $-1,12 \leqslant x \leqslant 1,12$. Таким образом, $-1,12 \leqslant x \leqslant 0,5$.

Система имеет два решения. Уточним одно из них, принадлежащее области D: $0,4 < x < 0,5$; $-0,76 < y < -0,73$. За начальное приближение примем $x_0 = 0,4$; $y_0 = -0,75$. Имеем

$$\begin{cases} F(x, y) = \sin(2x-y) - 1,2x - 0,4; \\ G(x, y) = 0,8x^2 + 1,5y^2 - 1; \end{cases}$$

Таблица II

n	x_n / y_n	$0{,}8x_n^2$ / $1{,}5y_n^2$	$2x_n-y_n$	$\sin(2x_n-y_n)$ / $\cos(2x_n-y_n)$	$F(x_n, y_n)$ / $G(x_n, y_n)$	$F'_x(x_n, y_n)$ / $G'_x(x_n, y_n)$	$F'_y(x_n, y_n)$ / $G'_y(x_n, y_n)$	Δ_n	Δ_{h_n} / Δ_{k_n}	h_n / k_n
0	0,4	0,128	0,55	0,9988	0,1198	−1,1584	−0,0208	2,6197	0,2701	0,10
	0,75	0,8438		0,0208	−0,0282	0,64	−2,25		0,0440	0,017
1	0,50	0,2	0,733	0,9869	−0,0131	−1,523	0,1615	3,2199	−0,0193	−0,0060
	−0,733	0,8059		−0,1615	0,059	0,8	−2,199		0,0794	0,0247
2	0,4940	0,1952	1,6963	0,9921	−0,0007	−1,4502	0,1251	2,9827	−0,0080	−0,0027
	−0,7083	0,7525		−0,1251	−0,0523	0,7904	−2,1249		−0,0764	−0,0256
3	0,4913	0,1931	1,7165	0,9894	−0,0002	−1,4904	0,1452	3,1673	−0,0003	−0,0001
	−0,7339	0,8079		−0,1452	0,0010	0,7861	−2,2017		0,0013	0,0004
4	0,4912									
	−0,7335									

Ответ: $x \approx 0{,}491$; $y \approx -0{,}734$.

$$\begin{cases} F'_x=2\cos(2x-y)-1{,}2; \\ G'_x=1{,}6; \end{cases} \qquad \begin{cases} F'_y=-\cos(2x-y); \\ G'_y=3y. \end{cases}$$

Уточнение корней проводим методом Ньютона:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+h_n, \\ y_{n+1}=y_n+k_n, \end{cases}$$

где $h_n=\dfrac{\Delta_{h_n}}{\Delta_n}$; $k_n=\dfrac{\Delta_{k_n}}{\Delta_n}$,

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}; \quad \Delta_{h_n}=\begin{vmatrix} F'_y(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_y(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{k_n}=\begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_x(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_x(x_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

Все вычисления производим в табл. II.

Работа 7

Задание. Используя метод Горнера, найти один из корней уравнения с шестью значащими цифрами.

№ 1. $x^3-15x+25=0$.
№ 2. $x^3+21x^2+30=0$.
№ 3. $x^3+25x+19=0$.
№ 4. $x^3-18x^2+50=0$.
№ 5. $x^3-23x-42=0$.
№ 6. $x^3+35x^2-12=0$.
№ 7. $x^3+20x-41=0$.
№ 8. $x^3-24x^2-27=0$.
№ 9. $x^3-23x+47=0$.
№ 10. $x^3+31x^2+26=0$.
№ 11. $x^3+34x+23=0$.
№ 12. $x^3-19x^2+56=0$.
№ 13. $x^3-21x-37=0$.
№ 14. $x^3+27x^2-35=0$.
№ 15. $x^3+23x-42=0$.
№ 16. $x^3-27x^2+36=0$.
№ 17. $x^3-18x+33=0$.
№ 18. $x^3+23x^2+32=0$.
№ 19. $x^3+33x+21=0$.
№ 20. $x^3-21x^2+43=0$.
№ 21. $x^3-37x-52=0$.
№ 22. $x^3+39x^2-24=0$.
№ 23. $x^3+25x-37=0$.
№ 24. $x^3-31x^2+35=0$.
№ 25. $x^3-26x+43=0$.
№ 26. $x^3+34x^2+27=0$.
№ 27. $x^3+29x+34=0$.
№ 28. $x^3-21x^2+55=0$.
№ 29. $x^3-30x-41=0$.
№ 30. $x^3+28x^2-47=0$.

Образец выполнения задания

$$x^3-25x+52=0. \tag{1}$$

1. Для отделения корней воспользуемся аналитическим способом: $f(x)=x^3-25x+52$; $f'(x)=3x^2-25$; $3x^2-25=0$; $x_{1,2}=\pm\sqrt{25/3}\approx\pm2{,}9$.

Составим таблицу знаков функции $f(x)$:

x	$-\infty$	-6	-5	-3	3	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

Из таблицы видно, что это уравнение имеет один действительный (отрицательный) корень, причем $x \in [-6, -5]$.

2. Для уточнения корня по методу Горнера следует предварительно преобразовать уравнение с помощью подстановки $x=-y$. В результате получим уравнение

$$\varphi(y)=y^3-25y-52=0. \tag{2}$$

Искомый корень этого уравнения $y \in [5, 6]$. Отсюда следует, что первая цифра корня уравнения (2) есть $C_0=5$.

3. Составим уравнение, с помощью которого определяется следующая цифра корня, для чего выполним деление по схеме Горнера: $C_0=5$

1	0	−25	−52
1	5	0	$\boxed{-52}$
1	10	$\boxed{50}$	
1	$\boxed{15}$		

В результате получим уравнение

$$\varphi_1(y)=y^3+150y^2+5000y-52\,000=0. \tag{3}$$

Определим значения многочлена $\varphi_1(y)$ при некоторых значениях $y \in [0, 10]$ по схеме Горнера:

y	1	150	5000	−52 000
8	1	158	6264	−1888
9	1	159	6431	5879

Так как $\varphi_1(8)<0$, $\varphi_1(9)>0$, то $y \in [8, 9]$. Отсюда следует, что $C_1=8$.

4. Для определения следующей цифры составим уравнение, коэффициенты которого можно определить из таблицы деления по схеме Горнера: $C_1=8$

1	150	5000	−52 000
1	158	6264	$\boxed{-1888}$
1	166	$\boxed{7592}$	
1	$\boxed{174}$		

Следовательно,

$$\varphi_2(y)=y^3+1740y^2+759\,200y-1\,888\,000=0. \tag{4}$$

Определим значения многочлена $\varphi_2(y)$ при некоторых значениях $y \in (0, 10]$ по схеме Горнера:

y	1	1740	759 200	−1 888 000
2	1	762 684	762 684	−362 632
3	1	1743	764 429	405 287

Так как $\varphi_2(2)=0$, $\varphi_3(3)>0$, то $y \in [2, 3]$. Отсюда следует, что $C_2=2$.

5. Составим уравнение для определения последующих цифр, коэффициенты которого можно найти из таблицы деления по схеме Горнера: $C_2=2$

1	1740	759 200	−1 888 000
1	1742	762 684	$\boxed{-362\,632}$
1	1744	$\boxed{766\,172}$	
1	$\boxed{1746}$		

Таким образом,

$$\varphi_3(y)=y^3+17\,460y^2+76\,617\,200y-362\,632\,000=0. \qquad (5)$$

Разделив теперь модуль свободного члена на коэффициент при y, получим следующие три цифры искомого числа:

$$362\,632\,000/76\,617\,200 \approx 4{,}73.$$

В результате находим корень данного уравнения: $x \approx -5{,}82473$.

Работа 8

Задание. Используя метод Лобачевского, решить уравнение с точностью до 0,001.

№ 1. $x^4+6x^3+11x^2-2x-28=0$.

№ 2. $x^4+5x^3+9x^2+5x-1=0$.

№ 3. $x^4+3x^3+3x^2-2=0$.

№ 4. $x^4+x^3-7x^2+8x-6=0$.

№ 5. $x^4-10x^3+16x+5=0$.

№ 6. $x^4-3x^3-4x^2-x-3=0$.

№ 7. $x^4+4x^3+4x^2+4x-1=0$.

№ 8. $x^4+6x^3+13x^2+10x+1=0$.

№ 9. $x^4+x^3-4x^2+16x-8=0$.

№ 10. $x^4-x^3-4x^2-11x-3=0$.

№ 11. $x^4-6x^2-12x-8=0$.

№ 12. $x^4+4x^3+4x^2-4=0$.

№ 13. $x^4+x^3+2x+1=0$.

№ 14. $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0$.

№ 15. $x^4+3x^2-4x-1=0$.

№ 16. $x^4+3x^3+8x^2-5=0$.

№ 17. $x^4-6x^3+11x^2+2x-28=0$.

№ 18. $x^4-5x^3+9x^2-5x-1=0$.

№ 19. $x^4-3x^3+3x^2-2=0$.

№ 20. $x^4-x^3-7x^2-8x-6=0$.

№ 21. $x^4-10x^2-16x+5=0$.

№ 22. $x^4+3x^3+4x^2+x-3=0$.

№ 23. $x^4-4x^3-4x^2-4x-1=0$.

№ 24. $x^4+2x^3+3x^2+2x-2=0$.

№ 25. $x^4-6x^3+13x^2-10x+1=0$.

№ 26. $x^4-3x^2+4x-3=0$.

№ 27. $x^4-6x^2+12x-8=0$.

№ 28. $x^4-4x^3+4x^2-4=0$.

№ 29. $x^4-x^3-2x+1=0$.

№ 30. $x^4-2x^3+x^2-2x+1=0$.

Образец выполнения задания

$$x^4-2x^3+x-1{,}5=0$$

Вычисления помещаем в таблице:

m	2^m	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	1	1	-2	0	1	$-1{,}5$
1	2	1	4	1	1	2,25
2	4	1	14	$-2{,}5$	$-3{,}5$	5,0625
3	8	1	$1{,}96\cdot10^2$ $0{,}05\ 10$ $2{,}01\cdot10^2$	6,25 98 10,125 114,375	12,25 25,3125 37,5625	25,629
		1	$2{,}01\cdot10^2$	$1{,}1438\cdot10^2$	$3{,}7562\cdot10$	$2{,}5629\cdot10$
4	16	1	$4{,}0401\cdot10^4$ $-0{,}0229\cdot10^4$ $4{,}0172\cdot10^4$	$1{,}30828\cdot10^4$ $-1{,}50999\cdot10^4$ $+0{,}00513\cdot10^4$ $-0{,}19658\cdot10^4$	$1{,}4109\cdot10^3$ $-5{,}86629\cdot10^3$ $-4{,}4520\cdot10^3$	$6{,}5685\cdot10^2$
		1	$4{,}0172\cdot10^4$	$-1{,}9656\cdot10^3$	$-4{,}4520\cdot10^3$	$6{,}5685\cdot10^2$
5	32	1	$1{,}6138\cdot10^9$ 0	$3{,}8644\cdot10^6$ $35{,}7691\cdot10^7$ $0\cdot10^7$	$1{,}98203\cdot10^7$ $0{,}25825\cdot10^7$	$4{,}3145\cdot10^5$
		1	$1{,}6138\cdot10^9$	$3{,}6155\cdot10^8$	$2{,}2403\cdot10^7$	$4{,}3145\cdot10^5$
6	64	1	$2{,}6044\cdot10^{18}$	$13{,}0718\cdot10^{16}$ $-7{,}2308\cdot10^{16}$ $0\cdot10^{16}$	$5{,}0189\cdot10^{14}$ $-3{,}1198\cdot10^{14}$	$1.8615\cdot10^{11}$
		1	$2{,}6044\cdot10^{18}$	$5{,}8410\cdot10^{16}$	$1{,}8991\cdot10^{14}$	$1{,}8615\cdot10^{11}$
7	128	1	$6{,}7829\cdot10^{36}$	$3{,}4117\cdot10^{33}$ $-0{,}9892\cdot10^{33}$	$3{,}6066\cdot10^{28}$ $-2{,}1746\cdot10^{28}$	$3{,}4652\cdot10^{22}$
		1	$6{,}7829\cdot10^{36}$	$2{,}4225\cdot10^{33}$	$1{,}4320\cdot10^{28}$	$3{,}4652\cdot10^{22}$
8	256	1	$4{,}6008\cdot10^{73}$	$5{,}8685\cdot10^{66}$ $-0{,}1943\cdot10^{66}$	$2{,}05062\cdot10^{56}$ $-1{,}67899\cdot10^{56}$	$1{,}2008\cdot10^{45}$
		1	$4{,}6008\cdot10^{73}$	$5{,}6742\cdot10^{66}$	$3{,}7173\cdot10^{55}$	$1.2008\cdot10^{45}$

m	2^m	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
9	512	1	$2{,}1167\cdot10^{147}$	$3{,}2197\cdot10^{133}$ $-0{,}0003\cdot10^{133}$	$1{,}3818\cdot10^{111}$ $-13{,}6272\cdot10^{111}$	$1{,}4419\cdot10^{90}$
		1	$2{,}1167\cdot10^{147}$	$3{,}2194\cdot10^{133}$	$-1{,}2245\cdot10^{112}$	$1{,}4419\cdot10^{90}$
10	1024	1	$4{,}4804\cdot10^{294}$	$1{,}0365\cdot10^{267}$ 0	$1{,}4994\cdot10^{224}$ $-0{,}9284\cdot10^{224}$	$2{,}0791\cdot10^{180}$
		1	$4{,}4804\cdot10^{294}$	$1{,}0365\cdot10^{267}$	$0{,}5710\cdot10^{224}$	$2{,}0791\cdot10^{180}$

1. $$\lg|x_1|=\frac{1}{512}\cdot\lg 2{,}1167\cdot10^{147}=\frac{1}{512}\cdot147{,}3257=0{,}2877.$$

$$|x_1|=1{,}939;\quad x_1=1{,}939.$$

2. $$\lg|x_2|=\frac{1}{512}\cdot\lg\frac{3{,}2194\cdot10^{133}}{2{,}1167\cdot10^{147}}=\frac{1}{512}\cdot(-14+0{,}5077-0{,}3257)=$$

$$=\frac{1}{512}\cdot(-13{,}8180)=-0{,}02699=\bar{1}{,}97301.$$

$$|x_2|=0{,}9397;\quad x_2=-0{,}9397.$$

3. $$x_1+x_2+x_3+x_4=2;\quad x_3=u+iv;\quad x_4=u-iv;$$

$$x_3+x_4=2-1{,}939+0{,}9397=1;\quad 2u=1;\quad u=0{,}5;\quad u^2+v^2=r^2.$$

$$\lg(r^2)=\frac{1}{512}\cdot\lg\frac{1{,}4419\cdot10^{90}}{3{,}2194\cdot10^{133}}=\frac{1}{512}(-43+0{,}1590-0{,}5077)=$$

$$=\frac{1}{512}\cdot(-43{,}3487)=-0{,}08467=\bar{1}{,}91533;$$

$$r^2=0{,}8228;\quad v^2=r^2-u^2=0{,}8228-0{,}25=0{,}5728;$$

$$v=0{,}7568;\quad x_{3,4}=0{,}5\pm0{,}7568\cdot i.$$

Ответ: $x_1\approx1{,}939$; $x_2\approx-0{,}940$; $x_{3,4}\approx0{,}5\pm0{,}757i$.

Работа 9

Задание. Используя метод выделения квадратного множителя (метод Хичкока), решить уравнение с точностью до 0,001.

№ **1.** $2x^4+0{,}2x^3+1{,}4x^2+2{,}3x-1{,}5=0.$

№ **2.** $x^4+0{,}77x^3-1{,}002x^2+6{,}164x-1{,}6=0.$

№ **3.** $x^4+x^3+2x+1=0.$

№ **4.** $x^4+1{,}4x^3-2{,}26x^2+0{,}5x-3{,}5=0.$

№ **5.** $x^4+2x^3+x^2+2x+1=0.$

№ **6.** $x^4+2{,}5x^3-0{,}4x^2+2{,}6x+7{,}2=0.$

№ **7.** $x^4+4x^3+4x^2+4x-1=0.$

№ **8.** $x^4+2x^3-0{,}4x^2+1{,}6x+0{,}64=0.$

№ 9. $x^4+4x^3+2{,}2x^2+6{,}4x+2{,}56=0$.

№ 10. $x^4-8x^3-5x^2-12x+2{,}25=0$.

№ 11. $x^4+10x^3+1{,}8x^2-31x+9{,}61=0$.

№ 12. $x^4-6x^3-1{,}2x^2-14{,}4x+5{,}76=0$.

№ 13. $x^4+8x^3-16x^2+24{,}492x-1=0$.

№ 14. $x^4-6x^3-7x^2-18x-1=0$.

№ 15. $x^4-2x^3-5x^2-10x-1=0$.

№ 16. $x^4+6x^3-5x^2+24x+2=0$.

№ 17. $x^4-8x^3-10x^2-40x+7=0$.

№ 18. $x^4+10x^3-3x^2+36x+2=0$.

№ 19. $x^4+6x^3-16x^2+24x-2=0$.

№ 20. $x^4-8x^3-5x^2-42x+6=0$.

№ 21. $x^4-2x^3+2{,}2x^2+2x-4=0$.

№ 22. $x^4+4x^3+7{,}2x^2+4x-1=0$.

№ 23. $x^4-4x^3+5{,}2x^2-4=0$.

№ 24. $x^4+2x^3+6{,}2x^2+10x+4=0$.

№ 25. $x^4-2x^3+4{,}2x^2-8x-1=0$.

№ 26. $x^4-4x^3+x^2-10x-0{,}8=0$.

№ 27. $x^4-4x^3-19x^2-26x+1=0$.

№ 28. $x^4-4x^3+4{,}2x^2-10x-4=0$.

№ 29. $x^4+4x^3-19x^2-10x+1=0$.

№ 30. $x^4+4x^3-2x^2+14x+3{,}1=0$.

Образец выполнения задания

$$x^4+4x^3+4{,}8x^2+16x-1=0.$$

Отделим какие-нибудь два корня уравнения; для этого определим знаки функции $f(x)=x^4+4x^3+4{,}8x^2+16x-1$ при некоторых значениях x:

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$\operatorname{sign} f$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

Итак, один корень принадлежит промежутку $[0,\ 1]$, а другой — промежутку $[-4,\ -3]$.

Примем $x_1\approx 0{,}5$; $x_2\approx -3{,}5$; тогда за начальное приближение квадратного трехчлена — делителя данного многочлена — можно взять

$$q_0(x)=x^2+(-0{,}5+3{,}5)x-3{,}5\cdot 0{,}5=x^2+3x-1{,}75,$$

где $p_0=3$, $q_0=-1{,}75$.

Уточнение коэффициентов делителя производим по формулам

$$p_{k+1}=p_k+h_k;\quad h_k=\frac{\Delta_{p_k}}{\Delta_k};\quad q_{k+1}=q_k+t_k;\quad t_k=\frac{\Delta_{q_k}}{\Delta_k};$$

где

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} P'_p(p_k,\ q_k) & P'_q(p_k,\ q_k) \\ Q'_p(p_k,\ q_k) & Q'_q(p_k,\ q_k)\end{vmatrix};$$

$$\Delta_{p_k}=\begin{vmatrix} P'_q(p_k,\ q_k) & P(p_k,\ q_k) \\ Q'_q(p_k,\ q_k) & Q(p_k,\ q_k)\end{vmatrix};$$

$$\Delta_{q_k}=\begin{vmatrix} P(p_k,\ q_k) & P'_p(p_k,\ q_k) \\ Q(p_k,\ q_k) & Q'_p(p_k,\ q_k)\end{vmatrix}.$$

Значения производных находятся по формулам

$$P'_p(p_k, q_k) = p_k R_k - S_k; \quad P'_q(p_k, q_k) = -R_k;$$
$$Q'_p(p_k, q_k) = q_k R_k; \quad Q'_q(p_k, q_k) = -S_k.$$

Величины $P(p_k, q_k)$ и $Q(p_k, q_k)$ определяются из тождества

$$f(x) = q_k(x) \cdot L_k(x) + P_k(p_k, q_k) \cdot x + Q_k(p_k, q_k),$$

а величины R_k и S_k — из тождества

$$L_k(x) = q_k(x) \cdot L_{1k}(x) + R_k \cdot x + S_k.$$

Все расчеты можно оформить в виде двух вычислительных таблиц, одна из которых (табл. I) служит для двукратного деления на $q_k(x)$ по схеме Горнера, а другая (табл. II) — для вычисления поправок h_k и t_k.

Таблица I

k		1	4	4,8	16	−1
0	$-p=-3$ $-q=\;\;1,75$ $-p=-3$ $-q=\;\;1,75$	 1 1	−3 — 1 −3 — $-2=R_0$	−3 1,75 3,55 — 1,75 $5,30=S_0$	−10,65 1,75 $7,1=P_0$	— 6,2125 $5,2125=Q_0$
1	−3,9 0,15 −3,9 0,15	 1 1	−3,9 — 0,1 −3,9 — $-3,8=R_1$	−0,39 0,15 4,56 — 0,15 $4,71=S_1$	−17,784 0,015 $-1,769=P_1$	— 0,684 $-0,316=Q_1$
2	−3,79 0,23 −3,79 0,23	 1 1	−3,79 — 0,21 −3,79 — $-3,58=R_2$	−0,7959 0,23 4,2341 — 0,23 $4,4641=S_2$	−16,0472 0,0483 $0,0011=P_2$	— 0,9738 $-0,0262=Q_2$
3	−3,7889 0,2361 −3,7889 0,2361	 1 1	−3,7889 — 0,2111 −3,7889 — −3,5778	−0,79984 0,2361 4,23626 — 0,2361 4,47236	−16,05077 0,04984 −0,00093	— 1,00018 0,00018
4	−3,78885 0,23607	 1	−3,78885 — 0,21115	−0,800016 0,23607 4,236054	−16,04977 0,049846 0,000076	— 1,000005 0,000005

Таблица II

k	p_k	R_k	P_k	$P'_p(p_k, q_k)$	$P'_q(p_k, q_k)$	Δ_k	Δp_k	h_k
	q_k	S_k	Q_k	$Q'_p(p_k, q_k)$	$Q'_q(p_k, q_k)$		Δq_k	t_k
0	3	−2	7,1	−11,3	2	52,89	48,055	0,9
	−1,75	5,3	5,2125	3,5	−5,3		83,751	1,6
1	3,9	3,8	−1,769	−19,53	3,8	89,82	−9,533	−0,11
	−0,15	4,71	−0,316	0,57	−4,71		−7,180	−0,08
2	3,79	−3,58	0,0011	−18,0323	3,58	77,55	−0,0889	−0,0011
	−0,23	4,4641	−0,0262	0,8234	−4,4641		−0,4715	−0,0061
3	3,7889	−3,5778	−0,0093	−18,0283	3,5778	77,607	−0,00352	−0,00005
	−0,2361	4,47236	0,00018	0,8447	−4,47236		0,00246	0,00003
4	3,78885							
	−0,23607							

Итак,

$$f(x) \approx (x^2+3{,}78885x-0{,}23607)(x^2+0{,}21115x+4{,}23605)=0.$$

Для определения корней остается решить два квадратных уравнения:

$$x^2+3{,}78885x-0{,}23607=0; \quad x_{1,2}=-1{,}894425 \pm \sqrt{3{,}588846+0{,}23607}=$$
$$=-1{,}894425 \pm 1{,}955739; \quad x_1 \approx -3{,}8502; \quad x_2 \approx 0{,}0613;$$
$$x^2+0{,}21115x+4{,}23605=0; \quad x_{3,4}=-0{,}105575 \pm \sqrt{0{,}01115-4{,}23605}=$$
$$=-0{,}105575+2{,}0555i; \quad x_{3,4} \approx -0{,}1056 \pm 2{,}0555i.$$

Ответ: $x_1 \approx -3{,}850$; $x_2 \approx 0{,}0613$; $x_{3,4} \approx -0{,}106+2{,}055i$.

Глава VI

НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦ

Работа 1

Задание. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы методом непосредственного развертывания с точностью до 0,001.

№ 1. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

№ 2. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 4 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

№ 3. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & -2\end{pmatrix}$.

№ 4. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

№ 5. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 5\\ -2 & -1 & -8\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$.

№ 6. $A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 8\\ 3 & 2 & 3\\ -1 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

№ 7. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

№ 8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}$.

№ 9. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 6 & 2\\ -6 & -3 & -2\end{pmatrix}$.

№ 10. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 3 & -3 & 2\\ -5 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

№ 11. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -6\\ 4 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

№ 12. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

№ 13. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

№ 14. $A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 2 & -4 & -1\end{pmatrix}$.

№ 15. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

№ 16. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & -6 & -4\\ -1 & 4 & 7\end{pmatrix}$.

№ 17. $A=\begin{pmatrix}-5 & -4 & 4\\ 2 & 3 & 1\\ 5 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

№ 18. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 1\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

№ 19. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 3\\ -4 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

№ 20. $A=\begin{pmatrix}6 & -3 & 5\\ 1 & 3 & 5\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

№ 21. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

№ 22. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ -2 & 4 & 1\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

№ 23. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 4 & -6\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

№ 24. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 7 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

№ 25. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ 6 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

№ 26. $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

№ 27. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ -3 & 1 & 1\\ -4 & 3 & -4\end{pmatrix}$.

№ 28. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & 3 & 6\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

№ 29. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 7 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

№ 30. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 9 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Составим характеристическое уравнение матрицы, корнями которого являются собственные числа матрицы:

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ -2 & 4-\lambda & 5 \\ 3 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Непосредственно развернув определитель третьего порядка, получим

$$(2-\lambda)(4-\lambda)(-1-\lambda)-15-12-9(4-\lambda)-10(2-\lambda)-2(-1-\lambda)=0,$$

откуда после раскрытия скобок, приведения подобных членов и умножения обеих частей уравнения на -1 имеем

$$\lambda^3-5\lambda^2-19\lambda+89=0.$$

Полученное уравнение решим с помощью метода Ньютона для уточнения корней, предварительно отделив корни. Находим

$$f(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2-19\lambda+89;\quad f'(\lambda)=3\lambda^2-10\lambda-19;$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+57}}{3}=\frac{5\pm 9{,}1}{3};\quad \lambda_1=-1{,}2;\quad \lambda_2=4{,}7.$$

Составим таблицу знаков функции $f(\lambda)$:

λ	$-\infty$	$-1{,}2$	$4{,}7$	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(\lambda)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Из таблицы знаков видим, что уравнение имеет три действительных корня: $\lambda_1\in\,]-\infty;\ -1{,}2]$; $\lambda_2\in[-1{,}2;\ 4{,}7]$; $\lambda_3\in[4{,}7;\ +\infty[$. Выберем для уточнения один из них, например λ_2.

Уменьшим промежуток $[-1{,}2;\ 4{,}7]$, в котором находится этот корень. Для этого вычислим значения функции $f(\lambda)$ в некоторых точках промежутка: $f(2)=39>0$; $f(3)=14>0$; $f(4)=-3<0$. Итак, корень λ_2 содержится внутри промежутка $[3,\ 4]$.

Уточнение корня производим по формуле

$$\lambda_{n+1}=\lambda_n-\frac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)}.$$

Для выбора начального приближения λ_0 определим знак второй производной $f''(\lambda)$ в промежутке $[3,\ 4]$; имеем $f''(\lambda)=6\lambda-10$; $f''(\lambda)>0$ при $3\leqslant\lambda\leqslant 4$; значит, $\lambda_0=3$.

Для вычисления значений функций и ее производной будем использовать схему Горнера. Корень определим с четырьмя верными десятичными знаками.

Все вычисления располагаем в трех таблицах. В табл. I вычисляем значения функции $f(\lambda)$, в табл. II — значения производной $f'(\lambda)$, а в табл. III производим уточнение λ.

Таблица I

n	λ_n	1	-5	-10	89
0	3		3	-6	-75
		1	-2	-25	14
1	3,63		3,63	4,9731	$-87{,}0224$
		1	$-1{,}37$	$-23{,}9731$	1,9776
2	3,75		3,75	$-4{,}6875$	$-88{,}8281$
		1	$-1{,}25$	$-23{,}6875$	0,1719
3	3,762		3,762	$-4{,}6574$	$-88{,}9991$
		1	$-1{,}238$	$-23{,}6574$	0,0009
4	3,7621		3,7621	$-4{,}65710$	$-89{,}0004$
		1	$-1{,}2379$	$-23{,}65710$	$-0{,}0004$

Таблица II

n	λ_n	3	-10	-19
0	3		9	-3
		3	-1	-22
1	3,63		10,89	3,2307
		3	0,89	$-15{,}7693$
2	3,75		11,25	4,6875
		3	1,25	$-14{,}3125$
3	3,762		11,286	4,8379
		3	1,286	$-14{,}1621$

Таблица III

n	λ_n	$f(\lambda_n)$	$f'(\lambda_n)$	$f(\lambda_n)/f'(\lambda_n)$
0	3	14	-22	$-0,63$
1	3,63	1,9776	$-15,7693$	$-0,12$
2	3,75	0,1719	$-14,3125$	$-0,012$
3	3,762	0,0009	$-14,1621$	$-0,00006$
4	3,7621			

Итак, $\lambda_2 \approx 3,7621$.

Для определения двух других собственных чисел решим квадратное уравнение, полученное при делении многочлена $f(\lambda)$ на $\lambda - 3,7621$:

$\lambda^2 - 1,2379\lambda - 23,6571 = 0$; $\lambda_{1,3} = 0,61895 \pm \sqrt{0,3831 + 23,6571} = 0,61895 \pm$ $\pm \sqrt{24,0402} = 0,61895 \pm 4,90302$; $\lambda_1 = 4,2841$; $\lambda_3 = 5,5220$.

2. Для определения собственных векторов, соответствующих найденным числам, воспользуемся системами линейных уравнений, полученными из равенства $(A - \lambda E)X = 0$.

При $\lambda_1 = -4,2841$ получим систему

$$\begin{cases} 6,2841x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 8,2841x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3,2841x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система линейных однородных уравнений является неопределенной, так как ее главный определитель равен нулю.

Решение можно найти, используя любые два уравнения системы, например второе и третье:

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} 8,2841 & 5 \\ 2 & 3,2841 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3,2841 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} -2 & 8,2841 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = C,$$

или

$$\frac{x_1}{17,2058} = \frac{x_2}{21,5622} = \frac{x_3}{-28,8523} = C.$$

Для того чтобы норма $\| X_1 \|$ вектора была равна единице, разделим все его координаты на наибольшую из них по абсолютной величине; тогда получим $X_1 = C(-0,597;\ -0,746;\ 1)$.

Аналогично определяются два других собственных вектора.

При $\lambda_2 = 3,7621$ имеем:

$$\begin{cases} -1,7621x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 0,2379x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4,7621x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} 0{,}2379 & 4 \\ 2 & -4{,}7621 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4{,}7621 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} -2 & 0{,}2379 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = C;$$

$$\frac{x_1}{-11{,}13229} = \frac{x_2}{5{,}4758} = \frac{x_3}{-4{,}7137} = C; \quad X_2 = C\ (1;\ -0{,}492;\ 0{,}423).$$

При $\lambda_3 = 5{,}5220$ имеем:

$$\begin{cases} -3{,}522x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 1{,}522x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6{,}522x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} -1{,}522 & 5 \\ 2 & -6{,}522 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -6{,}522 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} -2 & -1{,}522 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = C;$$

$$\frac{x_1}{-0{,}0735} = \frac{x_2}{1{,}956} = \frac{x_3}{8{,}566} = C; \quad X_3 = C(-0{,}00858;\ 0{,}228;\ 1).$$

Ответ:

λ_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}
$-4{,}284$	$-0{,}597$	$-0{,}746$	1
3,762	1	$-0{,}492$	0,423
5,522	$-0{,}00858$	0,228	1

Работа 2

Задание. Используя метод Крылова, найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственные числа определить с четырьмя верными цифрами, а собственные векторы — с тремя десятичными знаками.

№ 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 2{,}5 & 3{,}5 \\ 1{,}5 & 1 & 2 & 1{,}6 \\ 2{,}5 & 2 & 1 & 1{,}7 \\ 3{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1 \end{pmatrix}.$

№ 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 & 2 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 1 & 0{,}4 & 1{,}2 \\ 2 & 0{,}4 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}2 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$

№ 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 & 2 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 2 & 0{,}5 & 2 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$

№ 4. $A = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 & -0{,}5 & 2 \\ 1 & 2 & 1{,}2 & 0{,}4 \\ -0{,}5 & 1{,}2 & -1 & 1{,}5 \\ 2 & 0{,}4 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$

№ 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1{,}4 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 1{,}4 & 0{,}5 & 2 & 1{,}2 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$

№ 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}2 & -1 & 1 \\ 1{,}2 & 0{,}5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1{,}5 & 0{,}2 \\ 1 & -1 & 0{,}2 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$

№ 7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 & 3{,}5 & 4{,}5 \\ 1{,}5 & 2 & 2 & 1{,}6 \\ 3{,}5 & 2 & 2 & 1{,}7 \\ 4{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 2 \end{pmatrix}.$

№ 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 1{,}2 & -1 \\ 0{,}5 & 2 & -0{,}5 & 0 \\ 1{,}2 & -0{,}5 & -1 & 1{,}4 \\ -1 & 0 & 1{,}4 & 1 \end{pmatrix}.$

№ 9. $A=\begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}8 & 2 \\ 2 & 0{,}8 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

№ 10. $A=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 1 & 0{,}9 \\ 1{,}2 & 2 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 1 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 0{,}5 & 1{,}2 & 1 & 2{,}2 \end{pmatrix}.$

№ 11. $A=\begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}6 & 2 \\ 2 & 0{,}6 & 1 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}.$

№ 12. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 1{,}5 & 3 & 2 & 1{,}6 \\ 4{,}5 & 2 & 3 & 1{,}7 \\ 5{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 3 \end{pmatrix}.$

№ 13. $A=\begin{pmatrix} 1{,}6 & 1 & 1{,}4 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}5 & 2 \\ 1{,}4 & 0{,}5 & 2 & 1{,}2 \\ 1 & 2 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$

№ 14. $A=\begin{pmatrix} 2{,}4 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}8 & 2 \\ 2 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 2 & 0{,}5 & 1{,}2 \end{pmatrix}.$

№ 15. $A=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}2 & 2 & 1 \\ 1{,}2 & 2 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1{,}2 & 0{,}5 & 1{,}6 \end{pmatrix}.$

№ 16. $A=\begin{pmatrix} 1{,}8 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 2{,}8 & 1{,}5 & 1{,}3 \\ 1{,}7 & 1{,}5 & 3{,}8 & 1{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 1{,}4 & 4{,}8 \end{pmatrix}.$

№ 17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 1{,}2 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 2 & 0{,}4 & 2 \\ 1{,}2 & 0{,}4 & 1{,}5 & 1{,}4 \\ 0{,}5 & 2 & 1{,}4 & 1{,}3 \end{pmatrix}.$

№ 18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & -1 & 2 & 0 \\ -0{,}5 & 2 & 1 & -1{,}5 \\ 1 & 0 & -1{,}5 & 2 \end{pmatrix}.$

№ 19. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}4 & 2 \\ 1{,}5 & -1{,}2 & 1 & -0{,}5 \\ 0{,}4 & 1 & 2 & 1{,}2 \\ 2 & -0{,}5 & 1{,}2 & 2{,}5 \end{pmatrix}.$

№ 20. $A=\begin{pmatrix} 1{,}9 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 2{,}9 & 1{,}6 & 1{,}3 \\ 1{,}7 & 1{,}6 & 3{,}9 & 1{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 1{,}4 & 4{,}9 \end{pmatrix}.$

№ 21. $A=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 2{,}5 & 1{,}2 & 1{,}3 \\ 1{,}7 & 1{,}2 & 3{,}5 & 1{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 1{,}4 & 4{,}5 \end{pmatrix}.$

№ 22. $A=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 1{,}2 & 2 \\ 1 & 1{,}2 & -0{,}5 & 0{,}6 \\ 1{,}2 & -0{,}5 & 1 & -1 \\ 3 & 0{,}6 & -1 & 1{,}2 \end{pmatrix}.$

№ 23. $A=\begin{pmatrix} 1{,}6 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 2{,}6 & 1{,}3 & 1{,}3 \\ 1{,}7 & 1{,}3 & 3{,}6 & 1{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 1{,}4 & 4{,}6 \end{pmatrix}.$

№ 24. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 3 & 1{,}7 & 1{,}3 \\ 1{,}7 & 1{,}7 & 4 & 1{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 1{,}4 & 5 \end{pmatrix}.$

№ 25. $A=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}4 & 2 & 1 \\ 1{,}4 & 1 & 0 & 1{,}5 \\ 2 & 0 & 2{,}5 & 2 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

№ 26. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1{,}2 & 0{,}3 & 2 \\ 1{,}2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 1 & -0{,}4 & 1 \\ 2 & 0{,}7 & 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$

№ 27. $A=\begin{pmatrix} 1{,}7 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 2{,}7 & 1{,}4 & 1{,}3 \\ 1{,}7 & 1{,}4 & 3{,}7 & 1{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 1{,}4 & 4{,}7 \end{pmatrix}.$

№ 28. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1{,}7 & 1{,}6 & 4{,}5 \\ 1{,}7 & 2 & 2 & 3{,}5 \\ 1{,}6 & 2 & 1 & 1{,}5 \\ 4{,}5 & 3{,}5 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$

№ 29. $A=\begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}4 & 1 & 2 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}5 & 1 \\ 1 & 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 2 & 1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$

№ 30. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1{,}7 & 1{,}6 & 5{,}5 \\ 1{,}7 & 1 & 2 & 4{,}5 \\ 1{,}6 & 2 & 3 & 1{,}5 \\ 5{,}5 & 4{,}5 & 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix} 2{,}2 & 1 & 0{,}5 & 2 \\ 1 & 1{,}3 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 2 & 0{,}5 & 1{,}6 \\ 2 & 1 & 1{,}6 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

1. Для определения коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^4 - p_1\lambda^3 - p_2\lambda^2 - p_3\lambda - p_4 = 0$$

строим последовательность векторов:

B_0 — произвольный вектор; $B_1 = AB_0$; $B_2 = AB_1$; $B_3 = AB_2$; $B_4 = AB_3$.

Если векторы B_0, B_1, B_2, B_3 окажутся линейно независимыми, то коэффициенты p_1, p_2, p_3, p_4 определяются из решения системы линейных уравнений, соответствующей равенству

$$B_4 = p_1B_3 + p_2B_2 + p_3B_1 + p_4B_0.$$

Систему линейных уравнений будем решать с помощью схемы Халецкого. Все вычисления располагаем в таблице.

Таблица I

A				B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	Σ
2,2	1	0,5	2	1	2,2	10,09	52,373	291,0006	356,6636
1	1,3	2	1	0	1	6,5	41,84	239,605	288,945
0,5	2	0,5	1,6	0	0,5	6,55	37,64	220,7825	265,4725
2	1	1,6	2	0	2	10,20	57,56	321,930	391,69
				1 1	2,2	10,00	52,373	291,0006	356,6636
				0	1 1	6,5	41,84	239,605	288,945
				0	0,5	3,3 1	5,066667	30,6	36,666667
				0	2	−2,8	−11,933333 1	6,00000	7,00000
							1	6	7
						1		0,2	1,2
					1			−12,735	−11,735
				1				2,7616	3,7616

Таким образом, характеристическое уравнение матрицы имеет вид

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 - 0{,}2\lambda^2 + 12{,}735\lambda - 2{,}7616 = 0. \qquad (*)$$

2. Определение собственных чисел матрицы состоит в решении полученного характеристического уравнения каким-либо из рассмотренных ранее методов.

Решение уравнения (*) методом Лобачевского приведено в табл. II.

Таблица II

m	2^m	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	2	1	-6	$-0{,}2$	$12{,}735$	$-2{,}7616$
1	2	1	36 $-0{,}4$	$0{,}04$ $+152{,}82$ $-5{,}5232$	$162{,}1802$ $-1{,}1046$	$7{,}6264$
		1	$3{,}64\cdot 10^1$	$1{,}4734\cdot 10^2$	$1{,}6108\cdot 10^2$	$7{,}6264$
2	4	1	$13{,}2496\cdot 10^2$ $-2{,}9468\cdot 10^2$	$2{,}1709\cdot 10^4$ $-1{,}1727\cdot 10^4$ $-0{,}0015\cdot 10^4$	$2{,}5947\cdot 10^4$ $-2{,}2247\cdot 10^4$	$58{,}162\cdot 10^0$
		1	$1{,}0303\cdot 10^3$	$9{,}967\cdot 10^3$	$2{,}3700\cdot 10^4$	$5{,}8162\cdot 10^1$
3	8	1	$1{,}0615\cdot 10^6$ $-0{,}0199\cdot 10^6$	$9{,}9341\cdot 10^7$ $-4{,}8836\cdot 10^7$	$5{,}6169\cdot 10^8$ $-0{,}0116\cdot 10^8$	$33{,}828\cdot 10^2$
		1	$1{,}0416\cdot 10^6$	$5{,}0505\cdot 10^7$	$5{,}6053\cdot 10^8$	$3{,}3828\cdot 10^3$
4	16	1	$1{,}0849\cdot 10^{12}$ $-0{,}0001\cdot 10^{12}$	$2{,}5508\cdot 10^{15}$ $-1{,}1677\cdot 10^{15}$	$3{,}1419\cdot 10^{17}$ $-0{,}0000\cdot 10^{17}$	$11{,}443\cdot 10^6$
		1	$1{,}0848\cdot 10^{12}$	$1{,}3831\cdot 10^{15}$	$3{,}1419\cdot 10^{17}$	$1{,}1443\cdot 10^7$
5	32	1	$1{,}1768\cdot 10^{24}$	$1{,}9130\cdot 10^{34}$ $-0{,}6817\cdot 10^{30}$	$9{,}8715\cdot 10^{34}$ 0	$1{,}3094\cdot 10^{14}$
		1	$1{,}1768\cdot 10^{24}$	$1{,}2313\cdot 10^{30}$	$9{,}8715\cdot 10^{34}$	$1{,}3094\cdot 10^{14}$
6	64	1	$1{,}3849\cdot 10^{48}$ 0	$1{,}5161\cdot 10^{60}$ $-0{,}2334\cdot 10^{60}$	$9{,}7447\cdot 10^{69}$ 0	$1{,}7145\cdot 10^{28}$
		1	$1{,}3849\cdot 10^{48}$	$1{,}2827\cdot 10^{60}$	$9{,}7447\cdot 10^{69}$	$1{,}7145\cdot 10^{28}$
7	123	1	$1{,}9179\cdot 10^{96}$ 0	$1{,}6453\cdot 10^{120}$ $-0{,}0270\cdot 10^{120}$	$9{,}4959\cdot 10^{139}$ 0	$2{,}9395\cdot 10^{56}$
		1	$1{,}9179\cdot 10^{96}$	$1{,}6183\cdot 10^{120}$	$9{,}4959\cdot 10^{139}$	$2{,}9395\cdot 10^{56}$
8	256	1	$3{,}6783\cdot 10^{192}$	$2{,}6189\cdot 10^{240}$ $-0{,}0004\cdot 10^{240}$	$9{,}0172\cdot 10^{279}$	$8{,}6407\cdot 10^{112}$
		1	$3{,}6783\cdot 10^{192}$	$2{,}6185\cdot 10^{240}$	$9{,}0172\cdot 10^{279}$	$8{,}6407\cdot 10^{112}$

Имеем:

$$\lg|\lambda_1| = \frac{1}{256}\lg 3{,}6735\cdot 10^{192} = \frac{1}{256}\cdot 192{,}5657 = 0{,}7522; \quad |\lambda_1| = 5{,}652;$$

$$\lg|\lambda_2| = \frac{1}{256}\cdot\lg\frac{2{,}6158\cdot 10^{240}}{3{,}6783\cdot 10^{192}} = \frac{1}{256}\cdot(48 + 0{,}4180 - 0{,}5657) =$$

$$= \frac{1}{256}\cdot 47{,}8523 = 0{,}1869; \quad |\lambda_2| = 1{,}538;$$

$$\lg|\lambda_3| = \frac{1}{256}\lg\frac{9{,}0172\cdot 10^{279}}{2{,}6185\cdot 10^{240}} = \frac{1}{256}\cdot(39 + 0{,}9550 - 0{,}4180) =$$

$$= \frac{1}{256}\cdot 39{,}537 = 0{,}1544; \quad |\lambda_3| = 1{,}427.$$

$$\lg|\lambda_4| = \frac{1}{256}\cdot\lg\frac{8{,}6407\cdot 10^{112}}{9{,}0172\cdot 10^{279}} = \frac{1}{256}\cdot(-167 + 0{,}9366 - 0{,}9550) =$$

$$= \frac{1}{256}\cdot(-167{,}0184) = -0{,}6524 = \bar{1}{,}3476; \quad |\lambda_4| = 0{,}2226.$$

Непосредственной подстановкой найденных корней в уравнение определяем знаки корней; получим

$$\lambda_1 = 5{,}652; \ \lambda_2 = 1{,}538; \ \lambda_3 = -1{,}427; \ \lambda_4 = 0{,}2226.$$

Уточним последние цифры найденных значений корней, используя для вычислений схему Горнера (см. табл. III).

Таблица III

	1	−6	−0,2	12,735	−2,7616
5,652		5,652	−1,9669	−12,24752	2,7584
	1	−0,348	−2,1669	0,48768	−0,0052
5,653		5,653	−1,96159	−12,21947	2,9143
1,538	1	−0,347	−2,16159	0,51553	0,1527
		1,538	−6,86256	−10,86222	2,8808
	1	−4,462	−7,06256	1,87278	0,118
1,540		1,540	−6,8684	−10,8853	2,8485
	1	−4,46	−7,0684	1,8497	0,0869
1,544		1,544	−6,88006	−10,9316	2,7844
	1	−4,456	−7,08006	1,8034	0,0228

	1	−6	−0,2	12,735	−2,7616
1,545		1,545	−6,88298	−10,9432	2,7683
	1	−4,455	−7,08298	1,7918	0,0067
1,546		1,546	−6,88588	−10,95477	2,7522
	1	−4,454	−7,08588	1,78023	−0,0094
−1,427		−1,427	10,59833	−14,83842	3,0016
	1	−7,427	10,39833	−2,10342	0,2400
−1,425		−1,425	10,58062	−14,79239	2,9318
	1	−7,425	10,38062	−2,05739	0,1702
−1,421		−1,421	10,54524	−14,70059	2,7931
	1	−7,421	10,34524	−1,96555	0,0315
−1,420		−1,420	10,5364	−14,6777	2,7586
	1	−7,420	10,3364	−1,9427	−0,0030
0,2226		0,2226	−1,28605	−0,33079	2,7612
	1	−5,7774	−1,48605	+12,40421	−0,0004
0,2227		0,2227	−1,286605	−0,33107	2,7626
	1	−5,7773	−1,486605	12,40393	0,0008

Следовательно, собственные числа матрицы таковы:

$$\lambda_1=5{,}652;\quad \lambda_2=1{,}545;\quad \lambda_3=-1{,}420;\quad \lambda_4=0{,}2226.$$

3. Собственный вектор X_i, соответствующий собственному числу λ_i, определяется по формуле

$$X_i=\beta_{i3}B_0+\beta_{i2}B_1+\beta_{i1}B_2+\beta_{i0}B_3,$$

где коэффициенты при ранее найденных векторах B_0, B_1, B_2, B_3 находятся из равенства

$$\frac{D(\lambda)}{\lambda-\lambda_i}=\beta_{i0}\lambda^3+\beta_{i1}\lambda^2+\beta_{i2}+\beta_{i3}.$$

Окончательные значения собственных векторов должны иметь норму $\|X_i\|_1$, равную единице.

Все вычисления приведены в табл. IV.

Таблица IV

λ_i	$\beta_{i3}B_0$	$\beta_{i2}B_1$	$\beta_{i1}B_2$	$\beta_{i0}B_3$	X_i	$\bar{X}_i$
5,652	0,4877	−4,7672	−3,5113	52,373	44,5822	0,879
	0	−2,1669	−2,2620	41,84	37,4111	0,753
	0	−1,0334	−2,2794	37,64	34,2772	0,690
	0	−4,3338	−3,5496	57,56	49,6766	1,0
1,545	1,7918	−15,5826	−44,9510	52,373	−6,3688	1
	0	−7,08298	−28,9575	41,84	5,7995	−0,911
	0	−3,5415	−29,1802	37,64	4,9183	−0,772
	0	−14,1660	−45,4410	57,56	−2,0470	0,321
−1,420	−1,9427	22,7400	−74,8678	52,373	−1,6975	0,293
	0	10,3364	−48,2300	41,84	3,9464	−0,681
	0	5,1682	−48,6010	37,64	−5,7928	1
	0	20,6728	−75,6840	57,56	2,5488	−0,440
0,2226	12,4042	−5,2692	−58,2940	52,373	3,2140	−0,740
	0	−1,4860	−37,5531	41,84	2,8009	−0,645
	0	−0,7430	−37,8420	37,64	−0,9450	−0,218
	0	−2,9720	−58,9295	57,56	−4,3415	1

Работа 3

Задание. Используя метод Данилевского, найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственные числа определить с четырьмя верными цифрами, а собственные векторы — с тремя десятичными знаками. При выполнении работы воспользоваться вариантами работы 2.

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix} 2,2 & 1 & 0,5 & 2 \\ 1 & 1,3 & 2 & 1 \\ 0,5 & 2 & 0,5 & 1,6 \\ 2 & 1 & 1,6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Коэффициенты характеристического уравнения матрицы A определяются как элементы первой строки матрицы Фробениуса P, подобной данной матрице A. Матрицу P найдем в результате трех преобразований подобия:

$$P=M_1^{-1}\cdot M_2^{-1}\cdot M_3^{-1}\cdot AM_3\cdot M_2\cdot M_1.$$

Эти преобразования осуществляются в табл. I.

Таблица I

Строки	M \ M^{-1}	Элементы матриц				Σ	Σ'
1		2,2	1	0,5	2	5,7	
2		1	1,3	2	1	5,3	
3		0,5	2	0,5	1,6	4,6	
4		2	1	$\boxed{1{,}6}$	2	6,6	
I	M_3 \ M_3^{-1}	$-1{,}25$	$-0{,}625$	$0{,}625-1$	21,25	$-4{,}125$	
5	2	1,575	0,6875	0,3125	1,375	3,95	3,6375
6	1	$-1{,}5$	0,05	1,25	1,5	$-1{,}7$	$-2{,}95$
$\boxed{7}$	1,6	$-0{,}125$	1,6875	0,3125	0,975	2,85	2,5375
8	2	0	0	1	0	1	0
$\boxed{7'}$		1,45	$\boxed{4{,}125}$	4,375	2,81	12,76	
II	M_2 \ M_2^{-1}	$-0{,}351515$	$0{,}242424-1$	$-1{,}060606$	$-0{,}681212$	$-0{,}093333$	
9	1,45	1,333333	0,166667	$-0{,}416667$	0,906667	1,990000	1,823334
$\boxed{10}$	4,125	$-1{,}517575$	0,012121	1,196970	$-1{,}534061$	$-1{,}842546$	$-1{,}8546$
11	4,375	0	1	0	0	1	0
12	2,81	0	0	1	0	1	1
$\boxed{10'}$		$\boxed{-4{,}326668}$	4,666666	7,143334	$-5{,}013335$	2,469998	
III	M_1 \ M_1^{-1}	$-0{,}231125-1$	1,078582	1,651001	$-1{,}158706$	0,570878	
$\boxed{13}$	$-4{,}326668$	0,308167	1,604776	1,784667	$-0{,}638274$	2,443002	2,7511
14	4,666666	1	0	0	0	1	0
15	7,143334	0	1	0	0	1	1
16	$-5{,}013335$	0	0	1	0	1	1
13′		6,000002	0,200001	$-12{,}734997$	2,761600	$-3{,}773394$	

Округляя значения коэффициентов до четырех десятичных знаков, получим уравнение

$$\lambda^4-6\lambda^3-0{,}2\lambda^2+12{,}735\lambda-2{,}7616=0.$$

Это уравнение было решено выше (см. с. 93); его корни

$$\lambda_1=5{,}652;\ \lambda_2=1{,}545;\ \lambda_3=-1{,}420;\ \lambda_4=0{,}2226.$$

2. Собственный вектор X_i, соответстветствующий числу λ_i, определяется равенством

$$X_i=M_3\cdot M_2\cdot M_1\cdot Y_i,\ \text{где}\ Y_i=\begin{pmatrix}\lambda_i^3\\ \lambda_i^2\\ \lambda_i\\ 1\end{pmatrix}.$$

При этом отдельные координаты вектора $X_i=(x_{1i}\ x_{2i}\ x_{3i}\ x_{4i})$ находятся по формулам

$$x_{1i}=m_{11}\lambda_i^3+m_{12}\lambda_i^2+m_{13}\lambda_i+m_{14},$$

$$x_{2i}=m_{21}x_{1i}+m_{22}\lambda_i^2+m_{23}\lambda_i+m_{24},$$

$$x_{3i}=m_{31}x_{1i}+m_{32}x_{2i}+m_{33}\lambda_i+m_{34},$$

$$x_{4i}=1$$

Вычисление собственных векторов приведено в табл. II.

Таблица II

λ_i	M_1	M_2	M_3	Y_i	X_i	$\bar{X}_i$
5,652	−0,231125 1,078582 1,651001 1,158706	−0,351515 0,242424 −1,060606 −0,681212	−1,25 −0,625 0,625 −1,25	180,5537 31,9451 5,652 1	0,8977 0,7529 0,6898 1	0,898 0,753 0,690 1
1,545	−0,231125 1,078582 1,651001 −1,158706	−0,351515 0,242424 −1,060606 −0,681212	−1,25 −0,625 0,625 −1,25	3,6880 2,3870 1,545 1	3,1143 −2,8359 −2,4048 1	1 −0,911 −0,772 −0,440
0,2226	−0,231125 1,078582 1,651001 −1,158706	−0,351515 0,242424 −1,060606 −0,681212	−1,25 −0,625 0,625 −1,25	0,01103 0,4955 0,2226 1	−0,7403 −0,6451 0,2177 1	−0,740 −0,645 0,218 1
−1,420	−0,231125 1,078582 1,651001 −1,158706	−0,351515 0,242424 −1,060606 −0,681212	−1,25 −0,625 0,625 −1,25	−2,8633 2,0164 −1,420 1	−0,6665 1,5480 −2,2719 1	0,293 −0,681 1 −0,440

Работа 4

Задание. Используя метод Леверрье — Фаддеева, найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственные числа определить с четырьмя верными цифрами, а собственные векторы — с тремя десятичными знаками.

При выполнении работы воспользоваться вариантами работы 2.

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix} 2{,}2 & 2 & 0{,}5 & 2 \\ 1 & 1{,}3 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 2 & 0{,}5 & 1{,}6 \\ 2 & 1 & 1{,}6 & 2 \end{pmatrix}.$$

---

1. Коэффициенты характеристического уравнения $\lambda^4 - p_1\lambda^3 - p_2\lambda^2 - p_3\lambda - p_4 = 0$ определяются при помощи последовательности матриц, построенной следующим образом:

$$A_1 = A; \quad p_1 = \operatorname{Sp} A_1; \quad B_1 = A_1 - p_1E;$$

$$A_2 = AB_1; \quad p_2 = \frac{\operatorname{Sp} A_2}{2}; \quad B_2 = A_2 - p_2E;$$

$$A_3 = AB_2; \quad p_3 = \frac{\operatorname{Sp} A_3}{3}; \quad B_3 = A_3 - p_3E;$$

$$A_4 = AB_3; \quad p_4 = \frac{\operatorname{Sp} A_4}{4}.$$

Эти вычисления удобно располагать в таблице (см. табл. I).

В результате получим уравнение

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 - 0{,}2\lambda^2 + 12{,}735\lambda - 2{,}7616 = 0,$$

корнями которого, как это было установлено выше, служат числа $\lambda_1 = 5{,}652$; $\lambda_2 = 1{,}545$; $\lambda_3 = -1{,}420$; $\lambda_4 = 0{,}2226$.

2. Собственный вектор X_i, соответствующий числу λ_i, определяется по формуле

$$X_i = \lambda_i^3\bar{e} + \lambda_i^2\bar{b}_1 + \lambda_i\bar{b}_2 + \bar{b}_3,$$

где $\bar{e}$ — какой-либо единичный вектор, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$ — одноименные с $\bar{e}$ векторы матриц B_1, B_2, B_3.

Последовательно вычисляем векторы

$$\bar{u}_{0i} = \bar{e}; \quad \bar{u}_{1i} = \lambda_i\bar{u}_{0i} + \bar{b}_i; \quad \bar{u}_{2i} = \lambda_i\bar{u}_{1i} + \bar{b}_2; \quad \bar{u}_{3i} = X_i = \lambda_i\bar{u}_{2i} + \bar{b}_3.$$

Эти вычисления приведены в таблице (см. табл. II).

Таблица I

A_i				B_i			
2,2 1 0,5 2	1 1,3 2 1	0,5 2 0,5 1,6	2 2 1,6 2	−3,8 1 0,5 2	1 −4,7 2 1	0,5 2 −5,5 1,6	2 1 1,6 −4
$p_1=6$							
−3,11	−0,11	4,06	−0,44	−3,31 0,5 3,55 −1,8	0,5 −0,31 −6,3 2,5	3,55 −6,3 3,86 −2,6	−1,8 2,5 −2,6 −0,64
$p_2=0{,}4:2=0{,}2$							
−8,607	−10,003	−13,055	−6,54	4,128 2,64 −1,76 −4,04	2,64 2,732 0,48 −4,39	−1,76 0,48 −0,32 1,776	−4,04 −4,39 1,776 6,195
$p_3=-38{,}205:3=-12{,}735$							
2,7616	2,7616	2,7616	2,7616				

$p_4=2{,}7616$

Таблица II

λ_i	$\bar{u}_{0i}$	$\bar{u}_{1i}$	$\bar{u}_{2i}$	$\bar{u}_{3i}=X_i$	$\bar{X}_i$
5,652	1 0 0 0	1,852 1 0,5 2	7,1575 6,152 6,3760 9,504	45,5892 37,4111 34,2772 49,6766	0,897 0,763 0,690 1
1,545	1 0 0 0	−2,255 1 0,5 2	−6,7940 2,045 4,3225 1,290	−6,3687 5,7995 4,9183 −2,0470	1 −0,911 −0,772 0,321
−1,420	0 1 0 0	1 −6,12 2 1	−0,92 8,3804 −9,14 1,08	3,9464 −9,1682 13,4588 −5,9236	0,293 −0,681 1 −0,440
0,2226	0 1 0 0	1 −4,4774 2 1	0,7226 −1,3067 −5,8548 2,7226	2,8009 2,4411 −0,8233 −3,7839	−0,740 −0,645 0,218 1

Работа 5

Задание. Используя метод итераций, определить первое собственное число матрицы (наибольшее по модулю) с пятью-шестью верными цифрами. Затем найти соответствующий ему собственный вектор, имеющий первую норму, равную 1 (координаты вектора вычислить с тремя десятичными знаками).

№ 1. $A=\begin{pmatrix} 2{,}1 & 1 & 1{,}1 \\ 1 & 2{,}6 & 1{,}1 \\ 1{,}1 & 1{,}1 & 3{,}1 \end{pmatrix}$.

№ 2. $A=\begin{pmatrix} 2{,}4 & 1 & 1{,}4 \\ 1 & 2{,}9 & 1{,}4 \\ 1{,}4 & 1{,}4 & 3{,}4 \end{pmatrix}$.

№ 3. $A=\begin{pmatrix} 1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 1{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 1{,}3 \end{pmatrix}$.

№ 4. $A=\begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 1{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 1{,}6 \end{pmatrix}$.

№ 5. $A=\begin{pmatrix} 2{,}2 & 1 & 1{,}2 \\ 1 & 2{,}7 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 1{,}2 & 3{,}2 \end{pmatrix}$.

№ 6. $A=\begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 3 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 7. $A=\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 1{,}4 \end{pmatrix}$.

№ 8. $A=\begin{pmatrix} 1{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 1{,}7 \end{pmatrix}$.

№ 9. $A=\begin{pmatrix} 2{,}3 & 1 & 1{,}3 \\ 1 & 2{,}8 & 1{,}3 \\ 1{,}3 & 1{,}3 & 3{,}3 \end{pmatrix}$.

№ 10. $A=\begin{pmatrix} 2{,}6 & 1 & 1{,}6 \\ 1 & 3{,}1 & 1{,}6 \\ 1{,}6 & 1{,}6 & 3{,}6 \end{pmatrix}$.

№ 11. $A=\begin{pmatrix} 3{,}5 & 1 & 2{,}5 \\ 1 & 4 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}5 & 4{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 12. $A=\begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}9 & 1{,}8 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}3 & 1{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 13. $A=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 14. $A=\begin{pmatrix} 2{,}7 & 1 & 1{,}7 \\ 1 & 3{,}2 & 1{,}7 \\ 1{,}7 & 1{,}7 & 3{,}7 \end{pmatrix}$.

№ 15. $A=\begin{pmatrix} 1{,}4 & 1{,}2 & -1{,}3 \\ 1{,}2 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ -1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 16. $A=\begin{pmatrix} 3{,}2 & 1 & 2{,}2 \\ 1 & 3{,}7 & 2{,}2 \\ 2{,}2 & 2{,}2 & 4{,}2 \end{pmatrix}$.

№ 17. $A=\begin{pmatrix} 2{,}8 & 1 & 1{,}8 \\ 1 & 3{,}3 & 1{,}8 \\ 1{,}8 & 1{,}8 & 3{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 18. $A=\begin{pmatrix} 2{,}4 & 1{,}2 & -0{,}3 \\ 1{,}2 & 1{,}9 & 1{,}4 \\ -0{,}3 & 1{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 19. $A=\begin{pmatrix} 1{,}6 & 1{,}2 & -1{,}1 \\ 1{,}2 & 1{,}1 & 0{,}6 \\ -1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 20. $A=\begin{pmatrix} 3{,}3 & 1 & 2{,}3 \\ 1 & 3{,}8 & 2{,}3 \\ 2{,}3 & 2{,}3 & 4{,}3 \end{pmatrix}$.

№ 21. $A=\begin{pmatrix} 2{,}9 & 1 & 1{,}9 \\ 1 & 3{,}4 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 1{,}9 & 3{,}9 \end{pmatrix}$.

№ 22. $A=\begin{pmatrix} 2{,}6 & 1{,}2 & -0{,}1 \\ 1{,}2 & 2{,}1 & 1{,}6 \\ -0{,}1 & 1{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 23. $A=\begin{pmatrix} 1{,}8 & 1{,}2 & -0{,}9 \\ 1{,}2 & 1{,}3 & 0{,}8 \\ -0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 24. $A=\begin{pmatrix} 3{,}4 & 1 & 2{,}4 \\ 1 & 3{,}9 & 2{,}4 \\ 2{,}4 & 2{,}4 & 4{,}4 \end{pmatrix}$.

№ 25. $A=\begin{pmatrix} 3{,}1 & 1 & 2{,}1 \\ 1 & 3{,}6 & 2{,}1 \\ 2{,}1 & 2{,}1 & 4{,}1 \end{pmatrix}$.

№ 26. $A=\begin{pmatrix} 2{,}8 & 1{,}2 & 0{,}1 \\ 1{,}2 & 2{,}3 & 1{,}8 \\ 0{,}1 & 1{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 27. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1,2 & -0,7 \\ 1,2 & 1,5 & 1 \\ -0,7 & 1 & 0,8 \end{pmatrix}$. № 28. $A=\begin{pmatrix} 1,6 & 2,3 & -0,5 \\ 2,3 & 2 & 1,2 \\ -0,5 & 1,2 & 0,6 \end{pmatrix}$.

№ 29. $A=\begin{pmatrix} 2,2 & 1,2 & -0,5 \\ 1,2 & 1,7 & 1,2 \\ -0,5 & 1,2 & 0,8 \end{pmatrix}$. № 30. $A=\begin{pmatrix} 2,4 & 1,2 & 2,5 \\ 1,2 & 3,5 & 1,4 \\ 2,5 & 1,4 & 4,2 \end{pmatrix}$.

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix} 1,6 & 2,3 & 1,2 \\ 2,3 & 0,6 & 1,5 \\ 1,2 & 1,5 & 3,8 \end{pmatrix}.$$

1. Строим последовательность векторов $Y_i=AY_{i-1}$, где Y_0 — произвольный вектор; тогда $\lambda_1 \approx y_i^{(k+1)}/y_i^{(k)}$, где $y_i^{(k+1)}$ и $y_i^{(k)}$ — одноименные координаты двух последовательных векторов. Все вычисления приведены в таблице.

A	1,6	2,3	1,2	$\frac{y_1^{(k+1)}}{y_1^{(k)}}$	$\frac{y_2^{(k+1)}}{y_2^{(k)}}$	$\frac{y_3^{(k+1)}}{y_3^{(k)}}$
	2,3	0,6	1,5			
	1,2	1,5	3,8			
Y_0	1	1	1			
Y_1	5,1	4,4	6,5	5,11	5,48	5,76
Y_2	26,08	24,12	37,42	5,45	5,41	5,60
Y_3	142,108	130,586	209,672	5,484	5,511	5,548
Y_4	$7,79327 \cdot 10^2$	$7,19708 \cdot 10^2$	$1,16316 \cdot 10^3$	5,5151	5,5148	5,5321
Y_5	$42,9804 \cdot 10^3$	$3,96902 \cdot 10^3$	$6,43476 \cdot 10^3$	5,5205	5,5225	5,5267
Y_6	$2,37273 \cdot 10^4$	$2,19190 \cdot 10^4$	$3,55633 \cdot 10^4$	5,5233	5,5235	5,5251
Y_7	$1,31053 \cdot 10^5$	$1,21069 \cdot 10^5$	$1,96492 \cdot 10^5$	5,5240	5,5241	5,5246
Y_8	$7,23934 \cdot 10^5$	$6,68801 \cdot 10^5$	$10,85537 \cdot 10^5$	5,5242	5,5243	5,5244
Y_9	$3,99918 \cdot 10^6$	$3,69463 \cdot 10^6$	$5,99696 \cdot 10^6$	5,5243	5,5243	5,5244
Y_{10}	$2,20927 \cdot 10^7$	$2,04103 \cdot 10^7$	$2,31294 \cdot 10^7$	5,5243	5,5243	5,5243
Y_{11}	$1,22047 \cdot 10^8$	$1,12753 \cdot 10^8$	$1,830184 \cdot 10^8$			

Итак, $\lambda_1=5,5243$.

2. Собственный вектор X_1 определяется из равенства $X_1 \approx Y_k$. Следовательно, $X_1 \approx Y_{11}=(1,22047 \cdot 10^8;\ 1,12753 \cdot 10^8;\ 1,830184 \cdot 10^8)$.

Чтобы первая норма вектора была равна 1, разделим координаты вектора X_1 на наибольшую из них по абсолютной величине; тогда окончательно получим $X_1 = (0{,}667;\ 0{,}616;\ 1)$.

Работа 6

Задание. Используя метод итераций, определить второе собственное число матрицы λ_2 с тремя верными цифрами. Затем найти соответствующий ему собственный вектор, имеющий первую норму, равную 1 (координаты вектора вычислить с тремя десятичными знаками). При выполнении работы воспользоваться вариантами работы 5.

Образец выполнения задания

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 2{,}3 & 1{,}2 \\ 2{,}3 & 0{,}6 & 1{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}5 & 3{,}8 \end{pmatrix}.$$

1. Выше (см. с. 103) была построена последовательность векторов $Y_{k+1} = AY_k$, где Y_0 — произвольный вектор. Второе собственное число определяем из соотношения

$$\lambda_2 \approx \frac{y_i^{(k+1)} - \lambda_1 y_i^{(k)}}{y_i^{(k)} - \lambda_1 y_i^{(k-1)}},$$

где $y_i^{(k-1)}$, $y_i^{(k)}$, $y_i^{(k+1)}$ — одноименные координаты трех последовательных векторов; λ_1 — первое собственное число.

Предварительно найдем λ_1 с большей точностью, для чего продолжим вычисления, выполненные на с. 103:

Y_{11}	$1{,}22047 \cdot 10^8$	$1{,}127535 \cdot 10^8$	$1{,}830185 \cdot 10^8$	λ_1	λ_1	λ_1
Y_{12}	$6{,}7423100 \cdot 10^8$	$6{,}2288875 \cdot 10^8$	$10{,}1105731 \cdot 10^8$	5,524342	5,524342	5,524342
Y_{13}	$3{,}7246825 \cdot 10^9$	$3{,}4410505 \cdot 10^9$	$5{,}5854281 \cdot 10^9$	5,524343	5,524243	5,524343
Y_{14}	$2{,}057642 \cdot 10^{10}$	$1{,}9009542 \cdot 10^{10}$	$3{,}0855822 \cdot 10^{10}$	—	—	—

Отсюда $\lambda_1 = 5{,}524343$.

Для вычисления λ_2 выберем векторы Y_8, Y_9, Y_{10}; будем использовать различные координаты этих векторов. Все расчеты заносим в таблицу.

Y_{10}	$\lambda_1 Y_9$	$Y_{10} - \lambda Y_9$	Y_9	$\lambda_1 Y_8$	$Y_9 - \lambda_1 Y_8$	λ_2
$2{,}2092689 \cdot 10^7$	$2{,}2092842 \cdot 10^7$	-153	$3{,}9991813 \cdot 10^6$	$3{,}9992597 \cdot 10^6$	$-78{,}4$	1,95
$2{,}0410332 \cdot 10^7$	$2{,}0410403 \cdot 10^7$	-71	$3{,}6946338 \cdot 10^6$	$3{,}6946861 \cdot 10^6$	$-52{,}3$	1,36
$3{,}3129409 \cdot 10^7$	$3{,}3129264 \cdot 10^7$	145	$5{,}9969621 \cdot 10^6$	$5{,}9968787 \cdot 10^6$	83,4	1,74

Принимаем $\lambda_2 \approx (1{,}95+1{,}36+1{,}74)/3 = 1{,}68$.

2. Собственный вектор X_2 определяется из равенства $X_2 \approx Y_{k+1} - \lambda_1 Y_k$. Таким образом, $X_2 \approx Y_{10} - \lambda_1 Y_9 = (-153;\ -71;\ 145)$. Разделив координаты вектора на наибольшую из них по абсолютной величине, т. е. на -153, получим $X_2 \approx (1;\ 0{,}464;\ -0{,}948)$.

Работа 7

Задание. Вычислить собственные числа λ_1 и λ_2 матрицы и соответствующие им собственные векторы X_1 и X_2, имеющие первую норму, равную единице. Для улучшения сходимости итерационного процесса воспользоваться возведением матрицы в степень (ограничиться 8-й или 16-й степенью).

№ 1. $A=\begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 1 & 1{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 2. $A=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 1{,}2 & 1 \\ 1{,}2 & 0{,}3 & 1{,}2 \\ 1 & 1{,}2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 3. $A=\begin{pmatrix} 1{,}3 & 0{,}4 & 2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 2 & 0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 4. $A=\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}6 & 1{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1 \\ 1{,}3 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 5. $A=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 1{,}4 & 1{,}3 \\ 1{,}4 & 1 & 1{,}2 \\ 1{,}3 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 6. $A=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 1{,}3 & 0{,}2 \\ 1{,}3 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}2 & 2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

№ 7. $A=\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 2 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}4 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 8. $A=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 2 & 1{,}3 \\ 2 & 1{,}2 & 0{,}7 \\ 1{,}3 & 0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 9. $A=\begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}2 & 1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

№ 10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1{,}3 & 1{,}2 \\ 1{,}3 & 0{,}6 & 1{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 11. $A=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 1 & 2{,}2 \\ 1 & 1{,}4 & 0{,}5 \\ 2{,}2 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 12. $A=\begin{pmatrix} 2{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 13. $A=\begin{pmatrix} 1{,}2 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 1{,}5 & 0{,}4 & 2 \\ 0{,}3 & 2 & 1{,}2 \end{pmatrix}$.

№ 14. $A=\begin{pmatrix} 1{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 1 & 1{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 15. $A=\begin{pmatrix} 1{,}6 & 1{,}2 & 0{,}4 \\ 1{,}2 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}4 & 1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 16. $A=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 1{,}3 & 2{,}4 \\ 1{,}3 & 1{,}5 & 0{,}7 \\ 2{,}4 & 0{,}7 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 17. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1{,}3 & 0{,}6 \\ 1{,}3 & 2{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}7 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 18. $A=\begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 & 2{,}5 \\ 0{,}4 & 1{,}4 & 0{,}6 \\ 2{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

№ 19. $A=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 & 2{,}5 \\ 0{,}8 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ 2{,}5 & 0{,}3 & 1{,}2 \end{pmatrix}$.

№ 20. $A=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}8 & 1{,}3 \\ 0{,}8 & 2{,}6 & 1{,}3 \\ 1{,}3 & 1{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

№ 21. $A=\begin{pmatrix} 2{,}3 & 2 & 1{,}2 \\ 2 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 1{,}2 & 0{,}7 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

№ 22. $A=\begin{pmatrix} 1{,}2 & 2 & 0{,}5 \\ 2 & 1{,}4 & 1{,}7 \\ 0{,}5 & 1{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

№ 23. $A=\begin{pmatrix} 1,5 & 0,7 & 1,3 \\ 0,7 & 2,2 & 1 \\ 1,3 & 1 & 0,6 \end{pmatrix}$.

№ 24. $A=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 1,3 \\ 0,6 & 2 & 1,5 \\ 1,3 & 1,5 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 25. $A=\begin{pmatrix} 1,8 & 0,6 & 1,5 \\ 0,6 & 0,2 & 1,4 \\ 1,5 & 1,4 & 0,7 \end{pmatrix}$.

№ 26. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1,3 & 1 \\ 1,3 & 0,5 & 0,7 \\ 1 & 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}$.

№ 27. $A=\begin{pmatrix} 1,7 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 1,3 & 1 \\ 0,4 & 1 & 2,2 \end{pmatrix}$.

№ 28. $A=\begin{pmatrix} 0,6 & 2 & 1,2 \\ 2 & 1,2 & 0,5 \\ 1,3 & 0,5 & 0,8 \end{pmatrix}$.

№ 29. $A=\begin{pmatrix} 2,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 1,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,8 & 1,3 \end{pmatrix}$.

№ 30. $A=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,9 & 1,5 \\ 0,9 & 1,4 & 1 \\ 1,5 & 1 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix} 0,8 & 1,2 & 2,3 \\ 1,2 & 0,4 & 0,6 \\ 2,3 & 0,6 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

1. Составляем последовательность четных степеней матрицы A:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0,8 & 1,2 & 2,3 \\ 1,2 & 0,4 & 0,6 \\ 2,3 & 0,6 & 1,5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,8 & 1,2 & 2,3 \\ 1,2 & 0,4 & 0,6 \\ 2,3 & 0,6 & 1,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7,37 & 2,82 & 6,01 \\ 2,82 & 1,96 & 3,90 \\ 6,01 & 3,90 & 7,90 \end{pmatrix},$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 7,37 & 2,82 & 6,01 \\ 2,82 & 1,96 & 3,90 \\ 6,01 & 3,90 & 7,90 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7,37 & 2,82 & 6,01 \\ 2,82 & 1,96 & 3,90 \\ 6,01 & 3,90 & 7,90 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 98,3894 & 49,7496 & 102,7077 \\ 49,7496 & 27,0040 & 55,4022 \\ 102,7707 & 55,4022 & 113,7401 \end{pmatrix};$$

$$A^8=A^4\cdot A^4=\begin{pmatrix} 2,2717314\cdot 10^4 & 1,1931994\cdot 10^4 & 2,4556934\cdot 10^4 \\ 1,1931994\cdot 10^4 & 0,6273642\cdot 10^4 & 1,2910334\cdot 10^4 \\ 2,4556934\cdot 10^4 & 1,2910334\cdot 10^4 & 2,6568131\cdot 10^4 \end{pmatrix}.$$

Возьмем три последовательных вектора $Y_0=(1;\ 0;\ 0)$, $Y_1=A^8Y_0$ и $Y_2=AY_1$. Тогда $\lambda_1\approx y_i^{(2)}/y_i^{(1)}$; $X_1\approx Y_1$. Эти вычисления заносим в таблицу.

Y_0	Y_1	Y_2	λ_1	$\bar{X}_1$
1	$2,2717314\cdot 10^4$	$8,8973192\cdot 10^4$	3,9165	0,925
0	$1,1931994\cdot 10^4$	$4,6767735\cdot 10^4$	3,9195	0,486
0	$2,4556934\cdot 10^4$	$9,6244420\cdot 10^4$	3,9192	1

Для определения более точного значения λ_1 найдем первый столбец матрицы A^{16}, а затем составим векторы $Y_0(1;\ 0;\ 0)$, $Y_1'=A^{16}Y_0$ и $Y_2'=AY_1'$ и вычислим более точное значение λ_1. Эти вычисления также заносим в таблицу.

Y_0	$Y_1' = A^{16} Y_0$	$Y_2' = A Y_1'$	λ_1	$\bar{X}_1$
1	$12{,}614914 \cdot 10^4$	$49{,}42736 \cdot 10^4$	3,91817	0,925
0	$6{,}629578 \cdot 10^4$	$25{,}975798 \cdot 10^4$	3,91817	0,486
0	$13{,}643450 \cdot 10^4$	$53{,}457224 \cdot 10^4$	3,91816	1

Итак, $\lambda_1 \approx 3{,}91817$; $\bar{X}_1 = (0{,}925;\ 0{,}486;\ 1)$.

2. Для вычисления второго собственного числа составим последовательность векторов Y_1, Y_2, Y_3, где Y_1 и Y_2 уже вычислены, а $Y_3 = AY_2$. Тогда $\lambda_2 \approx \dfrac{y_i^{(3)} - \lambda_1 y_i^{(2)}}{y_i^{(2)} - \lambda_1 y_i^{(1)}}$; $X_2 \approx Y_3 - \lambda_1 Y_2$. Эти вычисления располагаем в таблице.

Y_2	$\lambda_1 Y_1$	$Y_2 - \lambda_1 Y_1$	Y_3	$\lambda_1 Y_2$	$Y_3 - \lambda_1 Y_2$	λ_2	$\bar{X}_2$
$8{,}8973192 \cdot 10^4$	$8{,}9010298 \cdot 10^4$	$-37{,}106$	$34{,}866200 \cdot 10^4$	$34{,}861208 \cdot 10^4$	49,92	$-1{,}35$	1
$4{,}6767735 \cdot 10^4$	$4{,}6751581 \cdot 10^4$	16,154	$18{,}322158 \cdot 10^4$	$18{,}324396 \cdot 10^4$	$-22{,}38$	$-1{,}38$	$-0{,}448$
$9{,}6244420 \cdot 10^4$	$9{,}6218242 \cdot 10^4$	26,178	$37{,}706561 \cdot 10^4$	$37{,}710200 \cdot 10^4$	$-36{,}39$	$-1{,}39$	$-0{,}729$

Итак, $\lambda_2 \approx -1{,}37$; $\bar{X}_2 \approx (1;\ -0{,}448;\ -0{,}729)$.

Работа 8

Задание. Используя метод скалярных произведений, определить первое собственное число матрицы с пятью верными цифрами.

№ 1. $A = \begin{pmatrix} 1{,}7 & 2{,}8 & 0{,}3 \\ 2{,}8 & 1{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 2. $A = \begin{pmatrix} 1{,}7 & 0{,}4 & 2{,}8 \\ 0{,}4 & 3{,}2 & 1{,}2 \\ 2{,}8 & 1{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 3. $A = \begin{pmatrix} 2{,}3 & 1{,}4 & 0{,}6 \\ 1{,}4 & 1{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}$.

№ 4. $A = \begin{pmatrix} 2{,}3 & 3{,}5 & 1{,}4 \\ 3{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 1{,}4 & 0{,}6 & 1{,}3 \end{pmatrix}$.

№ 5. $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 1{,}3 & 1{,}7 \\ 1{,}3 & 2{,}5 & 0{,}8 \\ 1{,}7 & 0{,}8 & 1{,}4 \end{pmatrix}$.

№ 6. $A = \begin{pmatrix} 3{,}7 & 0{,}3 & 1{,}2 \\ 0{,}3 & 2{,}4 & 0{,}8 \\ 1{,}2 & 0{,}8 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 7. $A = \begin{pmatrix} 3{,}2 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 0{,}5 & 1{,}4 & 2{,}3 \\ 1{,}2 & 2{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

№ 8. $A = \begin{pmatrix} 4{,}1 & 0{,}4 & 1{,}3 \\ 0{,}4 & 2{,}2 & 1{,}7 \\ 1{,}3 & 1{,}7 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

№ 9. $A = \begin{pmatrix} 2{,}3 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 3{,}4 & 1{,}2 \\ 0{,}6 & 1{,}2 & 1{,}7 \end{pmatrix}$.

№ 10. $A = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}8 & 2{,}9 \\ 0{,}8 & 3{,}4 & 2{,}2 \\ 2{,}9 & 2{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

№ 11. $A=\begin{pmatrix} 1,8 & 2,4 & 0,5 \\ 2,4 & 1,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 1,6 \end{pmatrix}.$

№ 12. $A=\begin{pmatrix} 0,7 & 1,5 & 3,2 \\ 0,7 & 2,3 & 1,3 \\ 3,2 & 1,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$

№ 13. $A=\begin{pmatrix} 2,4 & 3,5 & 0,7 \\ 3,5 & 1,2 & 0,4 \\ 0,7 & 0,4 & 1,3 \end{pmatrix}.$

№ 14. $A=\begin{pmatrix} 2,3 & 1,7 & 0,8 \\ 1,7 & 0,5 & 1,2 \\ 0,8 & 1,2 & 1,9 \end{pmatrix}.$

№ 15. $A=\begin{pmatrix} 2,4 & 1,3 & 0,5 \\ 1,3 & 0,8 & 2,4 \\ 0,5 & 2,4 & 3,3 \end{pmatrix}.$

№ 16. $A=\begin{pmatrix} 1,5 & 2,3 & 0,4 \\ 2,3 & 1,4 & 2,5 \\ 0,4 & 2,5 & 0,8 \end{pmatrix}.$

№ 17. $A=\begin{pmatrix} 3,4 & 1,3 & 2,3 \\ 1,3 & 0,6 & 1,2 \\ 2,3 & 1,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$

№ 18. $A=\begin{pmatrix} 2,5 & 1,2 & 0,8 \\ 1,2 & 3,4 & 0,5 \\ 0,8 & 0,5 & 1,2 \end{pmatrix}.$

№ 19. $A=\begin{pmatrix} 2,6 & 1,4 & 0,7 \\ 1,4 & 0,9 & 1,5 \\ 0,7 & 1,5 & 0,3 \end{pmatrix}.$

№ 20. $A=\begin{pmatrix} 3,6 & 0,5 & 1,2 \\ 0,5 & 0,8 & 2,3 \\ 1,2 & 2,3 & 1,6 \end{pmatrix}.$

№ 21. $A=\begin{pmatrix} 1,4 & 0,3 & 1,7 \\ 0,3 & 2,4 & 1,3 \\ 1,7 & 1,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$

№ 22. $A=\begin{pmatrix} 0,8 & 1,3 & 3,2 \\ 1,3 & 4,2 & 0,5 \\ 3,2 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}.$

№ 23. $A=\begin{pmatrix} 2,5 & 1,3 & 0,5 \\ 1,3 & 0,6 & 0,7 \\ 0,5 & 0,7 & 2,3 \end{pmatrix}.$

№ 24. $A=\begin{pmatrix} 0,7 & 1,5 & 2,7 \\ 1,5 & 2,4 & 1,3 \\ 2,7 & 1,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$

№ 25. $A=\begin{pmatrix} 1,6 & 2,7 & 0,9 \\ 2,7 & 3,4 & 0,5 \\ 0,9 & 0,5 & 1,3 \end{pmatrix}.$

№ 26. $A=\begin{pmatrix} 1,3 & 2,7 & 0,5 \\ 2,7 & 3,2 & 4,1 \\ 0,5 & 4,1 & 0,4 \end{pmatrix}.$

№ 27. $A=\begin{pmatrix} 2,4 & 0,5 & 2,6 \\ 0,5 & 1,4 & 0,6 \\ 2,6 & 0,6 & 1,3 \end{pmatrix}.$

№ 28. $A=\begin{pmatrix} 2,3 & 1,5 & 0,6 \\ 1,5 & 2,4 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 & 1,7 \end{pmatrix}.$

№ 29. $A=\begin{pmatrix} 2,3 & 0,5 & 1,4 \\ 0,5 & 3,3 & 0,8 \\ 1,4 & 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}.$

№ 30. $A=\begin{pmatrix} 2,4 & 2,5 & 0,7 \\ 2,5 & 1,2 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 3,5 \end{pmatrix}.$

Образец выполнения задания

$$A=\begin{pmatrix} 2,4 & 0,8 & 3,3 \\ 0,8 & 1,4 & 1,7 \\ 3,3 & 1,7 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Строим последовательность векторов $Y_{k+1}=AY_k$, где Y_0 — произвольный вектор. Вычисление λ_1 производим по формуле

$$\lambda_1 \approx \frac{(Y_k \cdot Y_k)}{(Y_{k-1} \cdot Y_k)}.$$

	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	$(Y_k \cdot Y_k)$	$(Y_{k-1} \cdot Y_k)$	λ_1
0	1	1	1	—	—	—
1	6,5	3,9	5,6	88,82	16,0	5,5512
2	37,20	20,18	31,44	2779,5460	496,566	5,5975
3	209,176	111,460	175,930	$3{,}712930 \cdot 10^4$	$1{,}55618 \cdot 10^4$	5,5989
4	$11{,}717594 \cdot 10^2$	$6{,}224658 \cdot 10^2$	$9{,}853208 \cdot 10^2$	$2{,}731341 \cdot 10^6$	$4{,}87831 \cdot 10^5$	5,5989

Ответ: $\lambda_1 \approx 5{,}5989$.

Глава VII

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Работа 1

Задание. Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана: 1) в неравноотстоящих узлах таблицы; 2) в равноотстоящих узлах таблицы.

Варианты к заданию 1)

Таблица 1

x	y
0,43	1,63597
0,48	1,73234
0,55	1,87686
0,62	2,03345
0,70	2,22846
0,75	2,35973

№ варианта	x
1	0,702
7	0,512
13	0,645
19	0,736
25	0,608

Таблица 2

x	y
0,02	1,02316
0,08	1,09590
0,12	1,14725
0,17	1,21483
0,23	1,30120
0,30	1,40976

№ варианта	x
2	0,102
8	0,114
14	0,125
20	0,203
26	0,154

Таблица 3

x	y
0,35	2,73951
0,41	2,30080
0,47	1,96864
0,51	1,78776
0,56	1,59502
0,64	1,34310

№ варианта	x
3	0,526
9	0,453
15	0,482
21	0,552
27	0,436

Таблица 4

x	y
0,41	2,57418
0,46	2,32513
0,52	2,09336
0,60	1,86203
0,65	1,74926
0,72	1,62098

№ варианта	x
4	0,616
10	0,478
16	0,665
22	0,537
28	0,673

Таблица 5

x	y	№ варианта	x
0,68	0,80866	5	0,896
0,73	0,89492	11	0,812
0,80	1,02964	17	0,774
0,88	1,20966	23	0,955
0,93	1,34087	29	0,715
0,99	1,52368		

Таблица 6

x	y	№ варианта	x
0,11	9,05421	6	0,314
0,15	6,61659	12	0,235
0,21	4,69170	18	0,332
0,29	3,35106	24	0,275
0,35	2,73951	30	0,186
0,40	2,36522		

Варианты к заданию 2)

Таблица 1

x	y	№ варианта	x
1,375	5,04192	1	1,3832
1,380	5,17744	7	1,3926
1,385	5,32016	13	1,3862
1,390	5,47069	19	1,3934
1,395	5,62968	25	1,3866
1,400	5,79788		

Таблица 2

x	y	№ варианта	x
0,115	8,65729	2	0,1264
0,120	8,29329	8	0,1315
0,125	7,95829	14	0,1232
0,130	7,64893	20	0,1334
0,135	7,36235	26	0,1285
0,140	7,09613		

Таблица 3

x	y	№ варианта	x
0,150	6,61659	3	0,1521
0,155	6,39989	9	0,1611
0,160	6,19658	15	0,1662
0,165	6,00551	21	0,1542
0,170	5,82558	27	0,1625
0,175	5,65583		

Таблица 4

x	y	№ варианта	x
0,180	5,61543	4	0,1838
0,185	5,46693	10	0,1875
0,190	5,32634	16	0,1944
0,195	5,19304	22	0,1976
0,200	5,06649	28	0,2038
0,205	4,94619		

Таблица 5

x	y	№ варианта	x
0,210	4,83170	5	0,2121
0,215	4,72261	11	0,2165
0,220	4,61855	17	0,2232
0,225	4,51919	23	0,2263
0,230	4,42422	29	0,2244
0,235	4,33337		

Таблица 6

x	y	№ варианта	x
1,415	0,888551	6	1,4179
1,420	0,889599	12	1,4258
1,425	0,890637	18	1,4396
1,430	0,891667	24	1,4236
1,435	0,892687	30	1,4315
1,440	0,893698		

Образец выполнения задания

1)

x	y
0,05	0,050042
0,10	0,100335
0,17	0,171657
0,25	0,255342
0,30	0,309336
0,36	0,376403

Вычислить значение функции $f(x)=y(x)$ при $x=0{,}263$.

2)

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,32130
0,126	1,32660

Определить значение функции $y(x)$ при $x=0{,}1157$.

1) Воспользуемся формулой

$$f(x) \approx \Pi_{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} (y_i/D_i),$$

где

$$\Pi_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

$$D_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x - x_i)(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n).$$

Вычисления приведены в таблице.

i	Разности						D_i	y_i/D_i
0	0,213	−0,05	−0,12	−0,20	−0,25	−0,31	$-0{,}19809 \cdot 10^{-4}$	−2526,2
1	0,05	0,163	−0,07	−0,15	−0,20	−0,26	$0{,}44499 \cdot 10^{-5}$	25547,7
2	0,12	0,07	0,093	−0,08	−0,13	−0,19	$-0{,}154365 \cdot 10^{-5}$	−111202,0
3	0,20	0,15	0,08	0,013	−0,05	−0,11	$0{,}1716 \cdot 10^{-6}$	1488007,0
4	0,25	0,20	0,13	0,05	−0,037	−0,06	$0{,}7215 \cdot 10^{-6}$	428740,0
5	0,31	0,26	0,19	0,11	0,06	−0,097	$-0{,}980402 \cdot 10^{-6}$	−38392,7

Итак, $\Pi_{5+1} = 0{,}1506492 \cdot 10^{-6}$, $\sum\limits_{i=0}^{5} (y_i/D_i) = 1790173{,}8$. Следовательно,

$$f(0{,}263) \approx \Pi_{5+1} \cdot \sum_{i=0}^{5} (y_i/D_i) = 0{,}1506492 \cdot 10^{-6} \cdot 1790173{,}8 = 0{,}269678.$$

2) Для вычислений используем формулу

$$f(x) = y(x) \approx \Pi_{n+1}(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(t-i)\,C_i},$$

где

$$\Pi_{n+1}(t) = t(t-1) \dots (t-n); \quad t = (x - x_0)/h; \quad h = x_{i+1} - x_i;$$

$$C_i = (-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)!.$$

Здесь $t = (0{,}1157 - 0{,}101)/0{,}005 = 2{,}94$. Вычисления располагаем в таблице.

i	x_i	l_i'	$t-i$	C_i	$(t-i) \cdot C_i$	$\frac{y_i}{(t-i)\,C_i}$
0	0,101	1,26183	2,94	−120	−352,8	−0,0035766
1	0,106	1,27644	1,94	24	46,56	0,0274149
2	0,111	1,29122	0,94	−12	−11,28	−0,1144691
3	0,116	1,30617	−0,06	12	−0,72	−1,8141250
4	0,121	1,32130	−1,06	−24	25,44	0,0519379
5	0,126	1,33660	−2,06	120	−247,2	−0,0054069

Итак, $\Pi_{5+1}(t) = -0{,}7024271$; $\sum\limits_{i=0}^{5} \frac{y_i}{(t-i)\,C_i} = -1{,}858225$. Следовательно,

$f(0{,}1157) \approx 1{,}30527$.

Работа 2

Задание. Используя схему Эйткина, вычислить приближенное значение функции, заданной таблично, при данном значении аргумента.

Таблица 1

x	y	№ варианта	x
0,2050	0,207921	1	0,2054
0,2052	0,208130	7	0,2063
0,2060	0,208964	13	0,2072
0,2065	0,209486	19	0,2079
0,2069	0,209904	25	0,2088
0,2075	0,210530		
0,2085	0,211575		
0,2090	0,212097		
0,2096	0,212724		
0,2100	0,213142		

Таблица 2

x	y	№ варианта	x
0,8902	1,23510	2	0,8942
0,8909	1,23687	8	0,8973
0,8919	1,23941	14	0,8958
0,8940	1,24475	20	0,8948
0,8944	1,24577	26	0,8934
0,8955	1,24858		
0,8965	1,25114		
0,8975	1,25371		
0,9010	1,26275		
0,9026	1,26691		

Таблица 3

x	y	№ варианта	x
0,6100	1,83781	3	0,6111
0,6104	1,83686	9	0,6124
0,6118	1,83354	15	0,6142
0,6139	1,82860	21	0,6163
0,6145	1,82720	27	0,6192
0,6158	1,82416		
0,6167	1,82207		
0,6185	1,81791		
0,6200	1,81446		
0,6225	1,80876		

Таблица 4

x	y	№ варианта	x
0,5400	1,66825	4	0,5415
0,5405	1,66636	10	0,5424
0,5410	1,66448	16	0,5436
0,5420	1,66071	22	0,5452
0,5429	1,65734	28	0,5461
0,5440	1,65322		
0,5449	1,64987		
0,5455	1,64764		
0,5465	1,64393		
0,5473	1,64097		

Таблица 5

x	y	№ варианта	x
0,62	0,537944	5	0,846
0,67	0,511709	11	0,864
0,74	0,477114	17	0,683
0,80	0,449329	23	0,785
0,87	0,418952	29	0,866
0,96	0,382893		
0,99	0,371577		

Таблица 6

x	y	№ варианта	x
1,03	2,80107	6	1,277
1,08	2,94468	12	1,118
1,16	3,18993	18	1,204
1,23	3,42123	24	1,255
1,26	3,52542	30	1,282
1,33	3,78104		
1,39	4,01485		

Образец выполнения задания

Пользуясь таблицей 2, определить значение функции $y(x)$ при $x=0{,}8925$.

Выберем из таблицы 2 шесть значений так, чтобы значение аргумента 0,8925 было расположено между двумя средними значениями аргумента, и вычисляем $f(0{,}8925)$ по схеме Эйткина до получения совпадающих значений с пятью десятичными знаками. Вычисления приведены в таблице.

x_i	y_i	$P_1(x_i, x_{i+1})$	$P_2(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$P_3(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$	x_i-x
0,8902	1,23510				−0,0023
0,8909	1,23687	1,240916			−0,0016
0,8919	1,23941	1,240934	1,240940		−0,0006
0,8940	1,24475	1,240936	1,240935	1,240937	0,0015
0,8944	1,24577	1,240925	1,240933	1,240934	0,0019
0,8955	1,24858	1,240916	1,240934	1,240933	0,0030

Из сравнения полученных результатов имеем $f(0{,}8925)\approx 1{,}24093$.

Работа 3

Задание. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента. При составлении таблицы разностей контролировать вычисления.

Таблица 1

x	y
1,415	0,888551
1,420	0,889599
1,425	0,890637
1,430	0,891667
1,435	0,892687
1,440	0,893698
1,445	0,894700
1,450	0,895693
1,455	0,896677
1,460	0,897653
1,465	0,898619

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1,4161	1,4625	1,4135	1,470
11	1,4179	1,4633	1,4124	1,4655
21	1,4263	1,4575	1,410	1,4662

Таблица 2

x	y
0,101	1,26183
0,106	1,27644
0,111	1,29122
0,116	1,30617
0,121	1,32130
0,126	1,33660
0,131	1,35207
0,136	1,36773
0,141	1,38357
0,146	1,39959
0,151	1,41579

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
2	0,1026	0,1440	0,099	0,161
12	0,1035	0,1492	0,096	0,153
22	0,1074	0,1485	0,1006	0,156

Таблица 3

x	y
0,15	0,860708
0,20	0,818731
0,25	0,778801
0,30	0,740818
0,35	0,704688
0,40	0,670320
0,45	0,637628
0,50	0,606531
0,55	0,576950
0,60	0,548812
0,65	0,522046
0,70	0,496585
0,75	0,4722367

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
3	0,1511	0,7250	0,1430	0,80
13	0,1535	0,7333	0,100	0,7540
23	0,1525	0,6730	0,1455	0,85

Таблица 4

x	y
0,180	5,61543
0,185	5,46693
0,190	5,32634
0,195	5,19304
0,200	5,06649
0,205	4,94619
0,210	4,83170
0,215	4,72261
0,220	4,61855
0,225	4,51919
0,230	4,42422
0,235	4,33337

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
4	0,1817	0,2275	0,175	0,2375
14	0,1827	0,2292	0,1776	0,240
24	0,1873	0,2326	0,1783	0,245

Таблица 5

x	y
3,50	33,1154
3,55	34,8133
3,60	36,5982
3,65	38,4747
3,70	40,4473
3,75	42,5211
3,80	44,7012
3,85	46,9931
3,90	49,4024
3,95	51,9354
4,00	54,5982
4,05	57,3975
4,10	60,3403
4,15	63,4340
4,20	66,6863

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
5	3,522	4,176	3,475	4,25
15	3,543	4,184	3,488	4,30
25	3,575	4,142	3,45	4,204

Таблица 6

x	y
0,115	8,65729
0,120	8,29329
0,125	7,95829
0,130	7,64893
0,135	7,36235
0,140	7,09613
0,145	6,84815
0,150	6,61659
0,155	6,39986
0,160	6,19658
0,165	6,00551
0,170	5,82558
0,175	5,65583
0,180	5,49543

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
6	0,1217	0,1736	0,1141	0,185
16	0,1168	0,1745	0,110	0,1825
26	0,1175	0,1773	0,1134	0,190

Таблица 7

x	y
1,340	4,25562
1,345	4,35325
1,350	4,45522
1,355	4,56184
1,360	4,67344
1,365	4,79038
1,370	4,91306
1,375	5,04192
1,380	5,17744
1,385	5,32016
1,390	5,47069
1,395	5,62968

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
7	1,3617	1,3921	1,3359	1,400
17	1,3463	1,3868	1,335	1,3990
27	1,3432	1,3936	1,3365	1,3975

Таблица 8

x	y
0,01	0,991824
0,06	0,951935
0,11	0,913650
0,16	0,876905
0,21	0,841638
0,26	0,807789
0,31	0,775301
0,36	0,744120
0,41	0,714193
0,46	0,685470
0,51	0,657902
0,56	0,631442

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
8	0,027	0,525	0,008	0,61
18	0,1243	0,492	0,0094	0,66
28	0,083	0,5454	0,0075	0,573

Таблица 9

x	y
0,15	4,4817
0,16	4,9530
0,17	5,4739
0,18	6,0496
0,19	6,6859
0,20	7,3891
0,21	8,1662
0,22	9,0250
0,23	9,9742
0,24	11,0232
0,25	12,1825
0,26	13,4637

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
9	0,1539	0,2569	0,14	0,2665
19	0,1732	0,2444	0,1415	0,27
29	0,1648	0,2550	0,1387	0,28

Таблица 10

x	y
0,45	20,1946
0,46	19,6133
0,47	18,9425
0,48	18,1746
0,49	17,3010
0,50	16,3123
0,51	15,1984
0,52	13,9484
0,53	12,5508
0,54	10,9937
0,55	9,2647
0,56	7,3510

№ варианта	Значения аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
10	0,455	0,5575	0,44	0,5674
20	0,4732	0,5568	0,445	0,57
30	0,4675	0,5511	0,4423	0,58

Образец выполнения задания

x	y
1,215	0,106044
1,220	0,113276
1,225	0,119671
1,230	0,125324
1,235	0,130328
1,240	0,134776
1,245	0,138759
1,250	0,142367
1,255	0,145688
1,260	0,148809

Определить значения функции $y(x)$ при следующих значениях аргумента:

1) $x_1 = 1{,}2273$; 3) $x_2 = 1{,}253$;
2) $x_3 = 1{,}210$; 4) $x_4 = 1{,}2638$.

Составим таблицу конечных разностей. Для контроля вычислений добавим к ней две строки: в строке $\sum$ запишем суммы элементов столбцов конечных разностей, а в строке P — разности крайних значений столбцов.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,215	0,106044	0,007232	−0,000837	0,000095
1,220	0,113276	0,006395	−0,000742	0,000093
1,225	0,119671	0,005653	−0,000649	0,000093
1,230	0,125324	0,005004	−0,000556	0,000091
1,235	0,130328	0,004448	−0,000465	0,000090
1,240	0,134776	0,003983	−0,000375	0,000088
1,245	0,138759	0,003608	−0,000287	0,000087
1,250	0,142367	0,003321	−0,000200	—
1,255	0,145688	0,003121	—	—
1,260	0,148809	—	—	—
$\sum$	—	0,042765	−0,004111	0,000637
P	0,042765	−0,004111	0,000637	—

При составлении таблицы разностей ограничиваемся разностями третьего порядка, так как они практически постоянны. Для вычисления значений функции при $x=1{,}2273$ и $x=1{,}210$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед:

$$y(x)\approx y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0,$$

где $q=(x-x_0)/h$.

1) Если $x=1{,}2273$, то примем $x_0=1{,}225$; тогда

$$q=\frac{1{,}2273-1{,}225}{0{,}005}=0{,}46,$$

$$y(1{,}2273)\approx 0{,}119671+0{,}46\cdot 0{,}005653+\frac{0{,}46(-0{,}54)}{2}(-0{,}000649)+$$

$$+\frac{0{,}46(-0{,}54)(-1{,}54)}{6}0{,}000093=0{,}119671+0{,}0026004+0{,}0000806+0{,}0000059=$$
$$=0{,}1223579\approx 0{,}122358.$$

2) Если $x=1{,}210$, то примем $x_0=1{,}215$; тогда

$$q=\frac{1{,}210-1{,}215}{0{,}005}=-1,$$

$$y(1{,}210)\approx 0{,}106044+(-1)\,0{,}007232+\frac{(-1)(-2)}{2}(-0{,}000837)+\frac{(-1)(-2)(-3)}{6}\times$$
$$\times\, 0{,}000095=0{,}097880.$$

Для вычисления значений функции при $x=1{,}253$ и $x=1{,}2638$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад:

$$y(x)\approx y_n+q\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3},$$

где $q=(x-x_n/h$.

3) Если $x=1{,}253$, то примем $x_n=1{,}255$; тогда

$$q=\frac{1{,}253-1{,}255}{0{,}005}=-0{,}4,$$

$$y(1{,}253)\approx 0{,}145688+(-0{,}4)\,0{,}003321+\frac{(-0{,}4)\,0{,}6}{2}(-0{,}000287)+\frac{(-0{,}4)\,0{,}6\cdot 1{,}6}{6}\times$$
$$\times 0{,}000088=0{,}145688-0{,}0013284+0{,}0000344-0{,}0000056=0{,}1443884\approx$$
$$\approx 0{,}144388.$$

4) Если $x=1{,}2638$, то примем $x_n=1{,}260$; тогда

$$q=\frac{1{,}2638-0{,}260}{0{,}005}=0{,}76,$$

$$y(1{,}2638)\approx 0{,}148809+0{,}76\cdot 0{,}003121+\frac{0{,}76\cdot 1{,}76}{2}(-0{,}000200)+\frac{0{,}76\cdot 1{,}76\cdot 2{,}76}{6}\times$$
$$\times 0{,}000087=0{,}148809+0{,}0023720-0{,}0001338+0{,}0000535=$$
$$=0{,}1511007\approx 0{,}151101.$$

Работа 4

Задание. 1) Используя линейную интерполяцию, вычислить значения функции при заданных значениях аргумента. Предварительно убедиться в применимости формулы, для чего выбрать шесть значений из таблицы Брадиса и составить таблицу разностей.

2) Используя квадратичную интерполяцию, вычислить значения функций при данных значениях аргумента. Предварительно убедиться в применимости формулы.

Варианты к заданию 1)

№ 1. а) sin 0,1436; б) cos 1,1754.
№ 2. а) sin 0,4974; б) cos 0,9818.
№ 3. а) sin 0,2453; б) cos 1,0938.
№ 4. а) tg 0,3864; б) cos 0,9222.
№ 5. а) sin 0,4456; б) cos 1,0045.
№ 6. а) tg 0,3224; б) cos 0,8465.
№ 7. а) sin 0,6235; б) cos 0,9464.
№ 8. а) tg 0,2816; б) cos 0,8065.
№ 9. а) sin 0,7243; б) cos 0,8675.
№ 10. а) tg 0,2464; б) cos 0,7312.
№ 11. а) sin 0,8453; б) cos 0,4324.
№ 12. а) tg 0,2016; б) cos 0,7075.
№ 13. а) sin 0,9675; б) cos 0,3436.
№ 14. а) tg 0,1636; б) cos 0,6865.
№ 15. а) sin 1,0618; б) cos 0,1458.
№ 16. а) tg 0,1858; б) cos 0,5635.
№ 17. а) sin 1,1238; б) cos 0,1658.
№ 18. а) tg 0,1362; б) cos 0,5423.
№ 19. а) tg 0,4052; б) cos 0,7645.
№ 20. а) sin 0,2134; б) cos 1,1274.
№ 21. а) tg 0,4527; б) cos 0,7466.
№ 22. а) sin 0,3425; б) cos 1,0252.
№ 23. а) sin 0,1648; б) cos 1,1462.
№ 24. а) sin 0,5438; б) cos 0,9656.
№ 25. а) sin 0,2642; б) cos 1,0665.
№ 26. а) tg 0,3654; б) cos 0,9035.
№ 27. а) tg 0,3083; б) cos 0,8235.
№ 28. а) sin 1,0236; б) cos 0,2267.
№ 29. а) sin 1,1438; б) cos 0,7672.
№ 30. а) sin 0,9057; б) cos 0,2632.

Варианты к заданию 2)

Таблица 1

x	y	№ варианта	Значения аргумента x_1	x_2
1,675	9,5618	1	1,6763	1,6787
1,676	9,4703	2	1,6778	1,6792
1,677	9,3804	3	1,6785	1,6762
1,678	9,2923	4	1,6794	1,6776
1,679	9,2057	5	1,6801	1,6786
1,680	9,1208	6	1,6816	1,6803
1,681	9,0373	7	1,6822	1,6808
1,682	8,9554	8	1,6837	1,6814
1,683	8,8749	9	1,6849	1,6823
1,684	8,7959	10	1,6853	1,6838
1,685	8,7182	11	1,6868	1,6843
1,686	8,6418	12	1,6773	1,6798
1,687	8,5668	13	1,6788	1,6802
1,688	8,4931	14	1,6813	1,6797
		15	1,6845	1,6821

Таблица 2

x	y	№ варианта	Значения аргумента x_1	x_2
1,520	19,670	16	1,5223	1,5237
1,521	20,065	17	1,5228	1,5243
1,522	20,477	18	1,5239	1,5214
1,523	20,906	19	1,5241	1,5257
1,524	21,354	20	1,5256	1,5233
1,525	21,821	21	1,5267	1,5244
1,526	22,308	22	1,5272	1,5257
1,527	22,818	23	1,5284	1,5268
1,528	23,352	24	1,5295	1,5273
1,529	23,911	25	1,5303	1,5287
1,530	24,498	26	1,5318	1,5292
1,531	25,115	27	1,5242	1,5276
1,532	25,763	28	1,5263	1,5286
1,533	26,445	29	1,5288	1,5313
		30	1,5293	1,5308

Образец выполнения задания

1) Определить $\sin 0{,}6682$ и $\cos 0{,}3033$.

2) Пользуясь таблицей 2, определить значения функции $y(x)$ при $x_1=1{,}5306$ и $x_2=1{,}5282$.

---

1) Выберем из таблицы синусов несколько значений и составим таблицу разностей первого и второго порядков:

x	$\sin x$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0,63	0,5891	0,0081	−0,0001
0,64	0,5972	0,0080	−0,0001
0,65	0,6052	0,0079	0,0000
0,66	0,6131	0,0079	−0,0001
0,67	0,6210	0,0078	—
0,68	0,6288	—	—

На возможность использования линейной интерполяции указывает тот факт, что разности первого порядка практически постоянны, а также выполнение соотношения $\frac{1}{8}\max\limits_i|\Delta^2 y_i|<10^{-4}$; действительно, $\frac{1}{8}\cdot 0{,}0001<0{,}0001$.

При вычислении пользуемся формулой

$$f(x)=f(x_0)+q\cdot\Delta f(x_0),$$

где $q=(x-x_0)/h$, а x_0 — ближайшее значение в таблице, меньшее чем 0,6682. Имеем $x_0=0{,}66$; $q=(0{,}6682-0{,}66)/0{,}01=0{,}82$;

$$\sin 0{,}6682\approx 0{,}6131+0{,}82\cdot 0{,}0079=0{,}6131+0{,}0065=0{,}6196.$$

Выберем теперь из таблицы косинусов несколько значений и составим таблицу разностей первого и второго порядков:

x	$\cos x$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0,28	0,9611	−0,0029	0
0,29	0,9582	−0,0029	−0,001
0,30	0,9553	−0,0030	−0,001
0,31	0,9523	−0,0031	—
0,32	0,9492	—	—

Разности первого порядка практически постоянны, а также справедливо соотношение $\frac{1}{8}\max\limits_i|\Delta^2 y_i|<10^{-4}$ (так как $\frac{1}{8}\cdot 0{,}0001<0{,}0001$), что указывает на возможность применения линейной интерполяции.

Полагаем $x_0=0{,}30$; тогда $q=(0{,}3033-0{,}30)/0{,}01=0{,}33$; значит,

$$\cos 0{,}3033\approx 0{,}9553+0{,}33\cdot(-0{,}0030)=0{,}9553-0{,}0010=0{,}9543.$$

2) Выберем из таблицы 2 несколько значений и составим таблицу разностей первого, второго и третьего порядков:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,527	22,818	0,534	0,025	0,003
1,528	23,352	0,559	0,028	0,002
1,529	23,911	0,587	0,030	0,001
1,530	24,498	0,617	0,031	—
1,531	25,115	0,648	—	—
1,532	25,763	—	—	—

В этой таблице разности второго порядка практически постоянны, кроме того, справедливо соотношение $\frac{1}{15}\max\limits_i|\Delta^3 y_i|<10^{-3}$ (так как $\frac{1}{15}\cdot 0{,}003<0{,}001$; $0{,}0002<0{,}001$). Все это указывает на возможность применения квадратичной интерполяции.

Для вычислений воспользуемся формулой

$$f(x)\approx y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0,$$

где $q=(x-x_0)/h$.

Если $x=1{,}5306$, то $x_0=1{,}530$; $q=(1{,}5306-1{,}530)/0{,}001=0{,}6$;

$$f(1{,}5303)=24{,}498+0{,}6\cdot 0{,}617+\frac{0{,}6(-0{,}4)}{2}\cdot 0{,}031=24{,}498+0{,}3702-0{,}0037=$$
$$=24{,}8645.$$

Принимаем $f(1{,}5306)\approx 24{,}864$.

Если $x=1{,}5282$, то $x_0=1{,}528$; $q=(1{,}5282-1{,}528)/0{,}001=0{,}2$;

$$f(1{,}5282)=23{,}352+0{,}2\cdot 0{,}559+\frac{0{,}2(-0{,}8)}{2}\cdot 0{,}028=23{,}352+0{,}1118-0{,}0022=$$
$$=23{,}4616.$$

Принимаем $f(1{,}5282)\approx 23{,}462$.

Работа 5

Задание. Используя интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга и Бесселя, вычислить приближенные значения функции $y(x)$ при данных значениях аргумента: 1) $x=1{,}60+0{,}006n$; 2) $x=1{,}725+$ $+0{,}002n$; 3) $x=1{,}83+0{,}003n$; 4) $x=2-0{,}013n$ ($n=1$, 2, 3, ..., 30).

Функция $y(x)$ задана таблицей:

x	$y(x)$	x	$y(x)$
1,50	15,132	1,85	43,189
1,55	17,422	1,90	48,689
1,60	20,393	1,95	54,225

x	$y(x)$	x	$y(x)$
1,65	23,994	2,00	59,653
1,70	28,160	2,05	64,817
1,75	32,812	2,10	69,550
1,80	37,857		

Образец выполнения задания

x	$y(x)$	x	$y(x)$
0,12	6,278	0,20	6,436
0,14	6,405	0,22	6,259
0,16	6,487	0,24	5,954
0,18	6,505		

Найти значения функции $y=f(x)$ при следующих значениях аргумента: 1) $x=0,168$; 2) $x=0,192$; 3) $x=0,204$; 4) $x=0,175$.

Составим диагональную таблицу конечных разностей функции $f(x)$:

x_i	$y(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
$x_{-3}=0,12$	$y_{-3}=6,278$			
		126		
$x_{-2}=0,14$	$y_{-2}=6,404$		-43	
		83		-22
$x_{-1}=0,16$	$y_{-1}=6,487$		-65	
		18		-22
$x_0=0,18$	$y_0=6,505$		-87	
		-69		21
$x_1=0,20$	$y_{-1}=6,436$		-108	
		-177		-20
$x_2=0,22$	$y_{-2}=6,259$		-128	
		-305		
$x_3=0,24$	$y_{-3}=5,954$			

Таблица заканчивается разностями третьего порядка, так как они являются практически постоянными.

1) Для определения значения $y(0,168)$ примем $x_0=0,16$; тогда $t=(x-x_0)/h=(0,168-0,16)/0,02=0,4$.

Воспользуемся первой формулой Гаусса:

$$y(x)\approx P(x)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}.$$

Находим

$$y(0,168)\approx 6,487+0,4\cdot 0,018+\frac{0,4(-0,6)}{2}\cdot(-0,065)+\frac{1,4\cdot 0,4(-0,6)}{6}\times$$

$$\times(-0,022)\approx 6,487+0,0072+0,0078+0,0012=6,5032\approx 6,503.$$

2) Для определения $y(0,192)$ примем $x_0=0,18$; тогда $t=(0,192-0,18)/0,02=0,6$.

Воспользуемся формулой Бесселя:

$$y(x)\approx P(x)=\frac{y_0+y_{-1}}{2}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+$$

$$+\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\ \dots\ .$$

Находим

$$y(0{,}192)\approx\frac{6{,}505+6{,}436}{2}+(0{,}6-0{,}5)\cdot(-0{,}069)+\frac{0{,}6\cdot(-0{,}4)}{2}\times$$

$$\times\frac{-0{,}087-0{,}108}{2}+\frac{(0{,}6-0{,}5)\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}4)}{6}\cdot(-0{,}021)\approx$$

$$\approx 6{,}4705-0{,}0069+0{,}0117+0{,}0001=6{,}4754\approx 6{,}475.$$

3) Для определения $y(0{,}204)$ примем $x_0=0{,}20$; тогда $t=(0{,}204-0{,}20)$ $/0{,}02=0{,}2$.

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$y(x)\approx P(x)=y_0+t\cdot\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{t^2}{2}\cdot\Delta^2 y_{-1}+\frac{t(t^2-1)}{6}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^2 y_{-1}}{2}.$$

Находим

$$y(0{,}204)\approx 6{,}436+0{,}2\cdot\frac{-0{,}069-0{,}177}{2}+\frac{0{,}04}{2}\cdot(-0{,}108)+$$

$$+\frac{0{,}2\cdot(0{,}04-1)}{6}\cdot\frac{-0{,}021-0{,}020}{2}\approx 6{,}436-0{,}0246-0{,}0022+0{,}0007=$$

$$=6{,}4099\approx 6{,}410.$$

4) Для определения $y(0{,}175)$ примем $x_0=0{,}18$; тогда $t=(0{,}175-0{,}18)$ $/0{,}02=-0{,}25$.

Воспользуемся второй формулой Гаусса:

$$y(x)\approx P(x)=y_0+t\Delta y_{-1}+\frac{(t+1)t}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}.$$

Находим

$$y(0{,}175)\approx 6{,}505+(-0{,}25)\cdot 0{,}018+\frac{0{,}75\cdot(-0{,}25)}{2}\cdot(-0{,}087)+$$

$$+\frac{0{,}75\cdot(-0{,}25)\cdot(-1{,}25)}{6}\cdot(-0{,}022)\approx 6{,}505-0{,}0045+0{,}0082-0{,}0009=$$

$$=6{,}5078\approx 6{,}508.$$

Работа 6

Задание. Вычислить значения функции при заданных значениях аргумента, используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов. При вычислениях учитывать только разделенные разности первого и второго порядков. Вычисления провести дважды используя, если это возможно, различные узлы

Таблица 1

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,298	3,25578	1	0,308	0,335
0,303	3,17639	7	0,314	0,337
0,310	3,12180	13	0,325	0,303
0,317	3,04819	19	0,312	0,304
0,323	2,98755	25	0,321	0,336
0,330	2,91950			
0,339	2,83598			

Таблица 2

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,593	0,532050	2	0,608	0,630
0,598	0,535625	8	0,615	0,594
0,605	0,540598	14	0,622	0,596
0,613	0,546235	20	0,603	0,631
0,619	0,550431	26	0,610	0,628
0,627	0,555983			
0,632	0,559428			

Таблица 3

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,698	2,22336	3	0,720	0,775
0,706	2,24382	9	0,740	0,705
0,714	2,26446	15	0,750	0,777
0,727	2,29841	21	0,765	0,700
0,736	2,32221	27	0,755	0,704
0,747	2,35164			
0,760	2,38690			
0,769	2,41162			
0,782	2,44777			

Таблица 4

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,100	1,12128	4	0,115	0,160
0,108	1,13160	10	0,124	0,162
0,119	1,14594	16	0,130	0,164
0,127	1,15648	22	0,140	0,104
0,135	1,16712	28	0,150	0,102
0,146	1,18191			
0,157	1,19689			
0,169	1,21344			

Таблица 5

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,235	1,20800	5	0,238	0,257
0,240	1,21256	11	0,261	0,298
0,250	1,22169	17	0,244	0,272
0,255	1,22628	23	0,275	0,303
0,265	1,23547	29	0,268	0,292
0,280	1,24933			
0,295	1,26328			
0,300	1,26795			
0,305	1,27263			

Таблица 6

x	y	№ варианта	x_1	x_2
0,095	1,09131	6	0,105	0,114
0,102	1,23490	12	0,103	0,117
0,104	1,27994	18	0,109	0,115
0,107	1,35142	26	0,108	0,100
0,110	1,42815	30	0,111	0,118
0,112	1,48256			
0,116	1,60033			
0,120	1,73205			

Образец выполнения задания

Определить значения функции $y(x)$ при следующих значениях аргумента: 1) $x_1=0{,}112$; 2) $x_2=0{,}133$.

x	y
0,103	2,01284
0,108	2,03342
0,115	2,06070
0,120	2,07918
0,128	2,10721
0,136	2,13354
0,141	2,14922
0,150	2,17609

Вычисления производим по формуле

$$y(x) \approx y_0 + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1),$$

где

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}; \quad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

Предварительно вычислим необходимые значения разделенных разностей.

x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0,103	2,01284	4,116	−18,238166
0,108	2,03342	3,896142	−16,761833
0,115	2,06070	3,696	−14,788461
0,120	2,07918	3,503750	−13,281250
0,128	2,10721	3,291250	−11,942307
0,136	2,13354	3,136	—
0,141	2,14922	—	—

1) Найдем значение $f(0{,}112)$ двумя способами, взяв за x_0 сначала 0,103, а затем 0,108:

$$f(0{,}112) \approx 2{,}01284 + 4{,}116 \cdot (0{,}112 - 0{,}103) + (-18{,}238166) \cdot (0{,}112 - 0{,}103) \times$$
$$\times (0{,}112 - 0{,}106) = 2{,}01284 + 0{,}037044 - 0{,}000657 = 2{,}04923;$$
$$f(0{,}112) \approx 2{,}03342 + 3{,}897142 \cdot (0{,}112 - 0{,}108) + (-16{,}761833) \cdot (0{,}112 - 0{,}108) \times$$
$$\times (0{,}112 - 0{,}115) = 2{,}03342 + 0{,}015589 + 0{,}000201 = 2{,}04921.$$

Принимаем $f(0{,}112) \approx 2{,}04922$.

2) Значение $f(0{,}133)$ также определим двумя способами, взяв за x_0 сначала 0,120, а затем 0,128:

$$f(0{,}133) \approx 2{,}07918 + 3{,}50375 \cdot (0{,}133 - 0{,}120) + (-13{,}28125) \cdot (0{,}133 - 0{,}120) \times$$
$$\times (0{,}133 - 0{,}128) = 2{,}07918 + 0{,}045549 - 0{,}000863 = 2{,}12387;$$
$$f(0{,}133) \approx 2{,}10721 + 3{,}29125 \cdot (0{,}133 - 0{,}128) + (-11{,}942307) \cdot (0{,}133 - 0{,}128) \times$$
$$\times (0{,}133 - 0{,}136) = 2{,}10721 + 0{,}016456 + 0{,}000179 = 2{,}12385.$$

Принимаем $f(0{,}133) \approx 2{,}12386$.

Глава VIII

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Работа 1

Задание. С помощью интерполяционных формул Ньютона, Гаусса, Стирлинга и Бесселя найти значение первой и второй производных при данных значениях аргумента для функции, заданной таблично.

Таблица 1

x	$y(x)$	x	$y(x)$
2,4	3,526	3,6	4,222
2,6	3,782	3,8	4,331
2,8	3,945	4,0	4,507
3,0	4,043	4,2	4,775
3,2	4,104	4,4	5,159
3,4	4,155	4,6	5,683

1) $x=2{,}4+0{,}05n$;
2) $x=3{,}12+0{,}03n$;
3) $x=4{,}5-0{,}06n$;
4) $x=4{,}04-0{,}04n$
($n=1, 3, 5, 7, \ldots, 29$).

Таблица 2

x	$y(x)$	x	$y(x)$
1,5	10,517	4,5	8,442
2,0	10,193	5,0	8,482
2,5	9,807	5,5	8,862
3,0	9,387	6,0	9,701
3,5	8,977	6,5	11,132
4,0	8,637	7,0	13,302

1) $x=1{,}6+0{,}08n$;
2) $x=3{,}27+0{,}11n$;
3) $x=6{,}3-0{,}12n$;
4) $x=5{,}85-0{,}09n$
($n=2, 4, 6, 8, \ldots, 30$).

Образец выполнения задания

x	$y(x)$	x	$y(x)$
0,8	2,857	2,4	6,503
1,2	3,946	2,8	7,010
1,6	4,938	3,2	7,288
2,0	5,801	3,6	7,301

Найти значения первой и второй производных данных функций при: 1) $x_1=1{,}2$; 2) $x_2=2{,}23$; 3) $x_3=2{,}76$; 4) $x_4=3{,}1$.

Составим диагональную таблицу конечных разностей данной функции:

x	$y(x)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0,8	2,857			
		1,089		
1,2	3,946		−0,097	
		0,992		−0,032
1,6	4,938		−0,129	
		0,863		−0,032
2,0	5,801		−0,161	
		0,702		−0,034
2,4	6,503		−0,195	
		0,507		−0,034
2,8	7,010		−0,229	
		0,278		−0,036
3,2	7,288		−0,265	
		0,013		
3,6	7,301			

1) Положим $x_0=1{,}2$; тогда $t=(x-x_0)/h=(1{,}2-1{,}2)/0{,}4=0$. Воспользуемся для вычислений формулами

$$y'(x_0)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0+\ldots\right),$$

$$y''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\ldots),$$

получающимися из первой интерполяционной формулы Ньютона.

Находим

$$y'(1{,}2)\approx\frac{1}{0{,}4}\cdot\left(0{,}992+\frac{1}{2}\cdot 0{,}129-\frac{1}{3}0{,}032\right)=2{,}5\cdot(0{,}992+0{,}0645-0{,}0107)=2{,}614;$$

$$y''(1{,}2)\approx\frac{1}{0{,}4^2}\cdot(-0{,}129+0{,}032)=0{,}606.$$

2) Положим $x_0=2{,}0$; тогда $t=(2{,}23-2{,}0)/0{,}4=0{,}575$. Воспользуемся для вычислений формулами

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2t-1}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{3t^2-3t+\frac{1}{2}}{6}\cdot\Delta^3 y_{-1}+\ldots\right),$$

$$y''(x)\approx\frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{2t-1}{2}\cdot\Delta^3 y_{-1}+\ldots\right),$$

получающимися из формулы Бесселя.

Находим

$$y'(2{,}23)\approx\frac{1}{0{,}4}\cdot\left(0{,}702+\frac{1{,}15-1}{2}\cdot\frac{-0{,}161-0{,}195}{2}+\frac{0{,}992-1{,}725+0{,}5}{6}\cdot(-0{,}034)=\right.$$

$$=2{,}5(0{,}702-0{,}0134+0{,}0013)=1{,}725.$$

$$y''(2{,}23)\approx\frac{1}{0{,}4^2}\cdot\left(\frac{-0{,}161-0{,}195}{2}+\frac{1{,}15-1}{2}\cdot(-0{,}034)\right)=$$

$$=6{,}25(-0{,}178-0{,}0026)=-1{,}129.$$

3) Положим $x_0=2{,}8$; тогда $t=(2{,}76-2{,}8)/0{,}4=-0{,}1$. Воспользуемся формулами

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+t\cdot\Delta^2 y_{-1}+\frac{3t^2-1}{6}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\ldots\right),$$

$$y''(x)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}+t\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\ldots\right),$$

получающимися из формулы Стирлинга.

Находим

$$y'(2{,}76)\approx\frac{1}{0{,}4}\cdot\left(\frac{0{,}507+0{,}207}{6}+0{,}1\cdot 0{,}229+\frac{0{,}03-1}{6}\cdot\frac{-0{,}034-0{,}036}{2}\right)=$$

$$=2{,}5\cdot(0{,}3925+0{,}0229+0{,}0057)=1{,}053,$$

$$y''(2{,}76)\approx\frac{1}{0{,}4^2}\cdot\left(-0{,}229-0{,}1\cdot\frac{-0{,}034-0{,}036}{2}\right)=6{,}25(-0{,}229+0{,}0035)=-1{,}409.$$

4) Положим $x_0=2{,}8$, тогда $t=(3,\ -2{,}8)/0{,}4=0{,}75$. Воспользуемся формулами

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_{-1}+\frac{3t^2-1}{6}\Delta^3 y_{-1}+\ldots\right),$$

$$y''(x)\approx\frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1}+t\Delta^3 y_{-1}+\ldots),$$

получающимися из первой формулы Гаусса.

Находим

$$y'(3{,}1)\approx\frac{1}{0{,}4}\cdot\left(0{,}278+\frac{1{,}5-1}{2}\cdot(-0{,}229)+\frac{1{,}6875-1}{6}\cdot(-0{,}036)=\right.$$

$$=2{,}5\cdot(0{,}278-0{,}0572-0{,}0041)=0{,}542;$$

$$y''(3{,}1)\approx\frac{1}{0{,}4^2}\cdot(-0{,}229+0{,}75\cdot(-0{,}036)=-1{,}600.$$

Работа 2

Задание. 1) Вычислить интеграл по формулам левых и правых прямоугольников при $n=10$, оценивая точность с помощью сравнения полученных результатов.

2) Вычислить интеграл по формуле средних прямоугольников, используя для оценки точности двойной просчет при $n_1=8$; $n_2=10$.

№ 1. 1) $\displaystyle\int_{0,6}^{1,4}\frac{\sqrt{x^2+5}\,dx}{2x+\sqrt{x^2+0{,}5}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,2}^{0,8}\frac{\sin(2x+0{,}5)\,dx}{2+\cos(x^2+1)}$.

№ 2. 1) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2}\frac{\sqrt{0{,}5x+2}\,dx}{\sqrt{2x^2+1}+0{,}8}$; 2) $\displaystyle\int_{0,3}^{0,9}\frac{\cos(0{,}8x+1{,}2)\,dx}{1{,}5+\sin(x^2+0{,}6)}$.

№ 3. 1) $\displaystyle\int_{0,8}^{1,8}\frac{\sqrt{0{,}8x^2+1}\,dx}{x+\sqrt{1{,}5x^2+2}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,0}\frac{\sin(x+1{,}4)\,dx}{0{,}8+\cos(2x^2+0{,}5)}$.

№ 4. 1) $\displaystyle\int_{1,0}^{2,2}\frac{\sqrt{1{,}5x+0{,}6}\,dx}{1{,}6+\sqrt{0{,}8x^2+2}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,6}^{1,0}\frac{\cos(0{,}6x^2+0{,}4)\,dx}{1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)}$.

№ 5. 1) $\displaystyle\int_{1,2}^{2,0}\frac{\sqrt{2x^2+1{,}6}\,dx}{2x+\sqrt{0{,}5x^2+3}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,5}^{1,3}\frac{\sin(0{,}5x+0{,}4)\,dx}{1{,}2+\cos(x^2+0{,}4)}$.

№ 6. 1) $\displaystyle\int_{1,3}^{2,5}\frac{\sqrt{x^2+0{,}6}\,dx}{1{,}4+\sqrt{0{,}8x^2+1{,}3}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{0,8}\frac{\cos(x^2+0{,}6)\,dx}{0{,}7+\sin(0{,}8x+1)}$.

№ 7. 1) $\displaystyle\int_{1,2}^{2,6}\frac{\sqrt{0{,}4x+1{,}7}\,dx}{1{,}5x+\sqrt{x^2+1{,}3}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,3}^{1,5}\frac{\sin(0{,}3x+1{,}2)\,dx}{1{,}3+\cos^2(0{,}5x+1)}$.

№ 8. 1) $\displaystyle\int_{0,8}^{1,6}\frac{\sqrt{0{,}3x^2+2{,}3}\,dx}{1{,}8+\sqrt{2x+1{,}6}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,5}^{1,8}\frac{\cos(x^2+0{,}6)\,dx}{1{,}2+\sin(0{,}7x+0{,}2)}$.

№ 9. 1) $\displaystyle\int_{1,2}^{2} \frac{\sqrt{0{,}6x+1{,}7}\,dx}{2{,}1x+\sqrt{0{,}7x^2+1}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(1{,}5x+0{,}3)\,dx}{2{,}3+\cos(0{,}4x^2+1)}$.

№ 10. 1) $\displaystyle\int_{0,8}^{2,4} \frac{\sqrt{0{,}4x^2+1{,}5}\,dx}{2{,}5+\sqrt{2x+0{,}8}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2+0{,}8)\,dx}{1{,}5+\sin(0{,}6x+0{,}5)}$.

№ 11. 1) $\displaystyle\int_{1,2}^{2,8} \frac{\sqrt{1{,}2x+0{,}7}\,dx}{1{,}4x+\sqrt{1{,}3x^2+0{,}5}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,5}^{1,3} \frac{\sin(0{,}7x+0{,}4)\,dx}{2{,}2+\cos(0{,}3x^2+0{,}7)}$.

№ 12. 1) $\displaystyle\int_{0,6}^{2,4} \frac{\sqrt{1{,}1x^2+0{,}9}\,dx}{1{,}6+\sqrt{0{,}8x^2+1{,}4}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,4} \frac{\cos(0{,}8x^2+1)\,dx}{1{,}4+\sin(0{,}3x+0{,}5)}$.

№ 13. 1) $\displaystyle\int_{0,7}^{2,1} \frac{\sqrt{0{,}6x+1{,}5}\,dx}{2x+\sqrt{x^2+3}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,2}^{1} \frac{\sin(0{,}8x^2+0{,}3)\,dx}{0{,}7+\cos(1{,}2x+0{,}3)}$.

№ 14. 1) $\displaystyle\int_{0,8}^{2,4} \frac{\sqrt{1{,}5x+2{,}3}\,dx}{3+\sqrt{0{,}3x+1}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,3}^{1,1} \frac{\cos(0{,}3x+0{,}5)\,dx}{1{,}8+\sin(x^2+0{,}8)}$.

№ 15. 1) $\displaystyle\int_{1,9}^{2,6} \frac{\sqrt{2x+1{,}7}\,dx}{2{,}4+\sqrt{1{,}2x^2+0{,}6}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,3}^{1,1} \frac{\sin(0{,}6x^2+0{,}3)\,dx}{2{,}4+\cos(x+0{,}5)}$.

№ 16. 1) $\displaystyle\int_{0,5}^{1,9} \frac{\sqrt{0{,}7x^2+2{,}3}\,dx}{3{,}2+\sqrt{0{,}8x+1{,}4}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(0{,}4x+0{,}6)\,dx}{0{,}8+\sin^2(x+0{,}5)}$.

№ 17. 1) $\displaystyle\int_{1}^{2,6} \frac{\sqrt{0{,}4x+3}\,dx}{0{,}7x+\sqrt{2x^2+0{,}5}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,4}^{1,8} \frac{\sin(0{,}2x^2+0{,}7)\,dx}{1{,}4+\cos(0{,}5x+0{,}2)}$.

№ 18. 1) $\displaystyle\int_{0,7}^{2,1} \frac{\sqrt{1{,}7x^2+0{,}5}\,dx}{1{,}4+\sqrt{1{,}2x+1{,}3}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,2}^{1} \frac{\cos(0{,}3x+0{,}8)\,dx}{0{,}9+2\sin(0{,}4x+0{,}3)}$.

№ 19. 1) $\displaystyle\int_{0,6}^{2,2} \frac{\sqrt{1{,}5x+1}\,dx}{1{,}2x+\sqrt{x^2+1{,}8}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,3}^{1,1} \frac{\sin(0{,}8x+0{,}3)\,dx}{1{,}2+\cos(x^2+0{,}4)}$.

№ 20. 1) $\displaystyle\int_{1,2}^{3} \frac{\sqrt{2x^2+0{,}7}\,dx}{1{,}5+\sqrt{0{,}8x+1}}$; 2) $\displaystyle\int_{0,5}^{1,3} \frac{\cos(x^2+0{,}2)\,dx}{1{,}3+\sin(2x+0{,}4)}$.

№ 21. 1) $\int\limits_{1,3}^{2,7} \frac{\sqrt{1,3x^2+0,8}\,dx}{1,7x+\sqrt{2x+0,5}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(0,6x+0,5)\,dx}{1,5+\cos(x^2+0,4)}$.

№ 22. 1) $\int\limits_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2+0,5}\,dx}{2x+\sqrt{x^2+2,5}}$; 2) $\int\limits_{0,2}^{0,8} \frac{\cos(x^2+1)\,dx}{2+\sin(2x+0,5)}$.

№ 23. 1) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\sqrt{2x^2+1}\,dx}{0,8x+\sqrt{0,5x+2}}$; 2) $\int\limits_{0,3}^{0,9} \frac{\sin(x^2+0,6)\,dx}{1,5+\cos(0,8x+1,2)}$.

№ 24. 1) $\int\limits_{0,8}^{1,8} \frac{\sqrt{1,5x^2+2}\,dx}{x+\sqrt{0,8x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1} \frac{\cos(2x^2+0,5)\,dx}{0,8+\sin(x+1,4)}$.

№ 25. 1) $\int\limits_{1}^{2,2} \frac{\sqrt{0,8x^2+2}\,dx}{1,6+\sqrt{1,5x+0,6}}$; 2) $\int\limits_{0,6}^{1} \frac{\sin(x+0,7)\,dx}{1,4+\cos(0,6x+0,4)}$.

№ 26. 1) $\int\limits_{1,2}^{2,0} \frac{\sqrt{0,5x^2+3}\,dx}{2x+\sqrt{2x^2+1,6}}$; 2) $\int\limits_{0,5}^{1,3} \frac{\cos(x^2+0,4)\,dx}{1,2+\sin(0,5x+0,4)}$.

№ 27. 1) $\int\limits_{1,3}^{2,5} \frac{\sqrt{0,8x^2+1,3}\,dx}{1,4+\sqrt{x^2+0,6}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{0,8} \frac{\sin(0,8x+1)\,dx}{0,7+\cos(x^2+0,6)}$.

№ 28. 1) $\int\limits_{1,2}^{2,6} \frac{\sqrt{x^2+1,3}\,dx}{1,5x+\sqrt{0,4x+1,7}}$; 2) $\int\limits_{0,3}^{1,5} \frac{\cos(0,5x^2+1)\,dx}{1,3+\sin(0,3x+1,2)}$.

№ 29. 1) $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{\sqrt{2x+1,6}\,dx}{1,8+\sqrt{0,3x^2+2,3}}$; 2) $\int\limits_{0,5}^{1,1} \frac{\cos(0,7x+0,2)\,dx}{1,2+\sin(x^2+0,6)}$.

№ 30. 1) $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{\sqrt{0,7x^2+1}\,dx}{2,1x+\sqrt{0,6x+1,7}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(0,4x^2+1)\,dx}{2,3+\sin(1,5x+0,3)}$.

Образец выполнения задания

1) $I=\int\limits_{1,5}^{2,3} \frac{\sqrt{0,3x+1,2}\,dx}{1,6x+\sqrt{x^2+0,5}}$; 2) $I=\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(0,6x+0,3)\,dx}{1,7+\cos(x^2+1,2)}$

---

1) Для вычислений по формулам левых и правых прямоугольников при $n=10$ разобьем отрезок интегрирования на 10 частей с шагом $h=\frac{b-a}{n}=\frac{2{,}3-1{,}5}{10}=0{,}08$.

Составим таблицу значений подынтегральной функции в точках деления отрезка:

i	x_i	$0{,}3x_i+1{,}2$	$\sqrt{0{,}3x_i+1{,}2}$	$\sqrt{x_i^2+0{,}5}$	$1{,}6x_i+\sqrt{x_i^2+0{,}5}$	y_i
0	1,5	1,65	1,2845	1,6583	4,0583	0,3165
1	1,58	1,674	1,2938	1,7310	4,2590	0,3037
2	1,66	1,698	1,3031	1,8043	4,4603	0,2922
3	1,74	1,722	1,3122	1,8782	4,6622	0,2815
4	1,82	1,746	1,3214	1,9525	4,8545	0,2716
5	1,90	1,77	1,3304	2,0273	5,0673	0,2626
6	1,98	1,794	1,3394	2,1025	5,2705	0,2541
7	2,06	1,818	1,3483	2,1780	5,4740	0,2463
8	2,14	1,842	1,3572	2,2538	5,6778	0,2390
9	2,22	1,866	1,3660	2,3299	5,8819	0,2322
10	2,30	1,89	1,3748	2,4062	6,0862	0,2259
						$\sum_1=2{,}6997$
						$\sum_2=2{,}6091$

В таблице найдены значения сумм: $\sum_1=\sum_{i=0}^{9} y_i=2{,}6997$; $\sum_2=\sum_{i=1}^{10} y_i=2{,}6091$.

Найдем приближенные значения интеграла. По формуле левых прямоугольников получим

$$I_1=h\cdot\sum_{i=0}^{9} y_i=0{,}08\cdot 2{,}6997=0{,}2158.$$

По формуле правых прямоугольников находим

$$I_2=h\sum_{i=1}^{10} y_i=0{,}08\cdot 2{,}6091=0{,}2087.$$

Эти результаты отличаются уже в сотых долях. За окончательное значение примем полусумму найденных значений, округлив результат до тысячных:

$$I=\frac{I_1+I_2}{2}=0{,}212.$$

2) Для решения воспользуемся формулой средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx h\sum_{i=0}^{n-1} y\left(x_i+\frac{h}{2}\right).$$

Вычисления выполним дважды при $n_1=8$ и $n_2=10$ и соответственно при $h_1=(b-a)/n_1=(1,2-0,4)/8=0,1$ и $h_2=(b-a)/n_2=(1,2-0,4)/10=0,08$. Результаты вычислений приведены в таблицах I и II.

Таблица I

i	x_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$\sin(0,6x+0,3)$	$1,7+\cos(x^2+1,2)$	$y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$
0	0,4	0,45	0,53963	1,86750	0,28896
1	0,5	0,55	0,58914	1,76824	0,33318
2	0,6	0,65	0,63654	1,64832	0,38618
3	0,7	0,75	0,68164	1,50947	0,45158
4	0,8	0,85	0,72429	1,35550	0,53433
5	0,9	0,95	0,76433	1,19300	0,64068
6	1,0	1,05	0,80162	1,03186	0,77687
7	1,1	1,15	0,83603	0,88559	0,94404
					$\sum_1=4,35582$

Таблица II

i	x_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$\sin(0,6x+0,3)$	$1,7+\cos(x^2+1,2)$	$y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$
0	0,4	0,44	0,53457	1,87627	0,28491
1	0,48	0,52	0,57451	1,80022	0,31913
2	0,56	0,60	0,61312	1,71080	0,35838
3	0,64	0,68	0,65032	1,60852	0,40430
4	0,72	0,76	0,68602	1,49467	0,45898
5	0,80	0,84	0,72014	1,37142	0,52511
6	0,88	0,92	0,75260	1,24212	0,60590
7	0,96	1,00	0,78333	1,11150	0,70475
8	1,04	1,08	0,81225	0,98571	0,82403
9	1,12	1,16	0,83930	0,87241	0,96205
					$\sum_2=5,44754$

Найдем приближенные значения интеграла

$$I_1=h_1\sum_1=0,1\cdot 4,35582=0,43558;$$

$$I_2=h_2\sum_2=0,08\cdot 5,44754=0,43580.$$

Значения различаются в десятичных долях, но второе значение точнее первого, поэтому принимаем $I\approx 0,4358$.

Работа 3

Задание. 1) Вычислить интеграл по формуле трапеций с тремя десятичными знаками.

2) Вычислить интеграл по формуле Симпсона при $n=8$; оценить погрешность результата, составив таблицу конечных разностей.

№ **1**. 1) $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x}\,dx$.

№ **2**. 1) $\int\limits_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3{,}2}}$; 2) $\int\limits_{1,6}^{2,4} (x+1)\sin x\,dx$.

№ **3**. 1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1{,}3}}$; 2) $\int\limits_{0,2}^{1} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x^2+1}\,dx$.

№ **4**. 1) $\int\limits_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{0,6}^{1,4} \frac{\cos x}{x+1}\,dx$.

№ **5**. 1) $\int\limits_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \sqrt{x}\cos(x^2)\,dx$.

№ **6**. 1) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0{,}5x^2}}$; 2) $\int\limits_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(2x)}{x^2}\,dx$.

№ **7**. 1) $\int\limits_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$; 2) $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x}\,dx$.

№ **8**. 1) $\int\limits_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{0{,}5+x^2}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+2}\,dx$.

№ **9**. 1) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} (2x+0{,}5)\sin x\,dx$.

№ **10**. 1) $\int\limits_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{0,8} \frac{\operatorname{tg}(x^2+0{,}5)}{1+2x^2}\,dx$.

№ **11**. 1) $\int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int\limits_{0,18}^{0,98} \frac{\sin x}{x+1}\,dx$.

№ **12**. 1) $\int\limits_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; 2) $\int\limits_{0,2}^{1,8} \sqrt{x+1}\cos(x^2)\,dx$.

№ 13. 1) $\int\limits_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$; 2) $\int\limits_{1,4}^{3} x^2 \lg x\, dx$.

№ 14. 1) $\int\limits_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{1,4}^{2,2} \frac{\lg(x^2+2)}{x+1} dx$.

№ 15. 1) $\int\limits_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx$.

№ 16. 1) $\int\limits_{1,6}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$; 2) $\int\limits_{0,8}^{1,6} (x^2+1)\sin(x-0,5)\, dx$.

№ 17. 1) $\int\limits_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$; 2) $\int\limits_{0,6}^{1,4} x^2 \cos x\, dx$.

№ 18. 1) $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$; 2) $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{\lg(x^2+3)}{2x} dx$.

№ 19. 1) $\int\limits_{1,4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,7}}$; 2) $\int\limits_{2,5}^{3,3} \frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1} dx$.

№ 20. 1) $\int\limits_{3,2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{0,5}^{1,2} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x+1} dx$.

№ 21. 1) $\int\limits_{0,8}^{1,7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$; 2) $\int\limits_{1,3}^{2,1} \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}} dx$.

№ 22. 1) $\int\limits_{1,2}^{2,0} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$; 2) $\int\limits_{0,2}^{1,0} (x+1)\cos(x^2)\, dx$.

№ 23. 1) $\int\limits_{2,1}^{3,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$; 2) $\int\limits_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(x^2-0,4)}{x+2} dx$.

№ 24. 1) $\int\limits_{1,3}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1}\lg(x+3)\, dx$.

№ 25. 1) $\int\limits_{0,6}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{12x^2+0,5}}$; 2) $\int\limits_{1,2}^{2,8} \frac{\lg(1+x^2)}{2x-1}\,dx$.

№ 26. 1) $\int\limits_{1,3}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-0,4}}$; 2) $\int\limits_{0,6}^{0,72} (\sqrt{x}+1)\,\mathrm{tg}\,2x\,dx$.

№ 27. 1) $\int\limits_{1,4}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{1,5x^2+0,7}}$; 2) $\int\limits_{0,8}^{1,2} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$.

№ 28. 1) $\int\limits_{0,15}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,6}}$; 2) $\int\limits_{1,2}^{2,8} \left(\frac{x}{2}+1\right)\sin\frac{x}{2}\,dx$.

№ 29. 1) $\int\limits_{2,3}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; 2) $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x+1}\,dx$.

№ 30. 1) $\int\limits_{0,32}^{0,66} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,3}}$; 2) $\int\limits_{1,6}^{3,2} \frac{x}{2}\lg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$.

Образец выполнения задания

1) $I=\int\limits_{0,7}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$; 2) $I=\int\limits_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1}\,dx$.

---

1) Для достижения заданной степени точности необходимо определить значение n так, чтобы

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2<0,0005. \qquad (*)$$

Здесь $a=0,7$; $b=1,3$; $M_2 \geqslant \max\limits_{[0,7;\ 1,3]} |f''(x)|$, где $f(x)=1/\sqrt{2x^2+0,3}$. Находим

$$f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{(2x^2+0,3)^3}},\quad f''(x)=\frac{8x^2-0,6}{\sqrt{(2x^2+0,3)^5}};$$

$$\max\limits_{[0,7;\ 1,3]} |f''(x)|<\frac{8\cdot 1,3^2-0,6}{\sqrt{(2\cdot 0,7^2+0,3)^5}}\approx 6,98.$$

Положим $M_2=7$, тогда неравенство $(*)$ примет вид $\frac{0,6^3\cdot 7}{12n^2}<0,0005$, откуда $n^2>252$, т. е. $n>16$; возьмем $n=20$.

Вычисление интеграла производим по формуле

$$I \approx h\left(\frac{y_0+y_{20}}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{19}\right),$$

где $h=(b-a)/h=0{,}6/20=0{,}003$; $y_i=y(x_i)=1/\sqrt{2x_i^2+0{,}3}$; $x_i=0{,}7+ih$ $(i=0,$ $1,\ 2,\ \ldots,\ 20)$.

Все расчеты приведены в табл. I.

Таблица I

i	x_i	x_i^2	$2x_i^2+0{,}3$	$\sqrt{2x_i^2+0{,}3}$	$y_0,\ y_{20}$	$y_1,\ y_2, \ldots, y_{18},\ y_{19}$
0	0,7	0,49	1,28	1,1314	0,88386	
1	0,73	0,5329	1,3658	1,1686		0,85572
2	0,76	0,5776	1,4552	1,2063		0,82898
3	0,79	0,6241	1,5482	1,2443		0,80366
4	0,82	0,6724	1,6448	1,2825		0,77973
5	0,85	0,7225	1,7450	1,3210		0,75700
6	0,88	0,7744	1,8488	1,3597		0,73546
7	0,91	0,8281	1,9562	1,3986		0,71501
8	0,94	0,8836	2,0672	1,4378		0,69551
9	0,97	0,9409	2,1818	1,4771		0,67700
10	1,00	1,0000	2,3000	1,5166		0,65937
11	1,03	1,0609	2,4218	1,5562		0,64259
12	1,06	1,1236	2,5472	1,5960		0,62657
13	1,09	1,1881	2,6762	1,6356		0,61140
14	1,12	1,2544	2,8088	1,6759		0,59669
15	1,15	1,3225	2,9450	1,7161		0,58272
16	1,18	1,3924	3,0848	1,7564		0,56935
17	1,21	1,4641	3,2282	1,7967		0,55658
18	1,24	1,5376	3,3752	1,8372		0,54431
19	1,27	1,6129	3,5258	1,8777		0,53253
20	1,30	1,6900	3,6800	1,9187	0,52129	
$\sum$					1,40515	12,77022

Таким образом,

$$I=0{,}03\left(\frac{1{,}40515}{2}+12{,}77022\right)=0{,}40418\approx 0{,}404.$$

2) Согласно условию $n=8$, поэтому $h=(b-a)/n=(1{,}6-1{,}2)/8=0{,}05$. Вычислительная формула имеет вид

$$I=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+2y_6+4y_7+y_8),$$

где $y_i=y(x_i)=\dfrac{\sin(2x_i-2{,}1)}{x_i^2+1}$, $x_i=1{,}2+ih$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ 8)$.

Вычисление значений функции, а также сложение значений функции, имеющих одинаковые коэффициенты в формуле, производим в табл. II.

Таблица II

i	x_i	$2x_i-2,1$	$\sin(2x_i-2,1)$	x_i^2+1	$y_0,\ y_8$	$y_1,\ y_3,\ y_5,\ y_7$	$y_2,\ y_4,\ y_6$
0	1,20	0,30	0,29552	2,44	0,1211		
1	1,25	0,40	0,38942	2,5625		0,1520	
2	1,30	0,50	0,4794	2,69			0,1782
3	1,35	0,60	0,5646	2,8225		0,2000	
4	1,40	0,70	0,6442	2,96			0,2176
5	1,45	0,80	0,7174	3,1024		0,2312	
6	1,50	0,90	0,7833	3,25			0,2410
7	1,55	1,00	0,8415	3,4025		0,2473	
8	1,60	1,10	0,8912	3,56	0,2503		
$\sum$					0,3713	0,8305	0,6368

Следовательно,

$$I\approx\frac{0,05}{3}(0,3714+4\cdot 0,8305+2\cdot 0,6368)=\frac{0,05}{3}\cdot 4,9670\approx 0,88278.$$

Для оценки точности полученного результата составим таблицу конечных разностей функций до разностей четвертого порядка (табл. III).

Таблица III

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1211	0,0309	−0,0047	0,0003	−0,0001
1	0,1520	0,0262	−0,0044	0,0002	0,0000
2	0,1782	0,0218	−0,0042	0,0002	0,0000
3	0,2000	0,0176	−0,0040	0,0002	0,0001
4	0,2176	0,0136	−0,0038	0,0003	−0,0001
5	0,2312	0,0098	−0,0035	0,0002	
6	0,2410	0,0063	−0,0033		
7	0,2473	0,0030			
8	0,2503				

Так как $\max|\Delta^4 y_i|=0,0001$, то остаточный член формулы

$$R_{\text{ост}}<\frac{(b-a)\cdot\max|\Delta^4 y_i|}{180}\approx\frac{0,4\cdot 0,0001}{180}\approx 0,0000003.$$

Вычисления производились с четырьмя значащими цифрами, а потому величина остаточного члена на погрешность не влияет.

Погрешность вычислений можно оценить из соотношения

$$\Delta I=(b-a)\,\Delta y\leqslant 0,4\cdot 0,0001<0,00005.$$

Значит, полученные четыре десятичных знака верны.

Работа 4

Задание. Найти приближенное значение интеграла по формуле «трех восьмых», используя для контроля точности вычислений двойной просчет при $n_1=9$ и $n_2=12$.

№ 1. $\int\limits_{0,6}^{2,4} \frac{(1+0{,}5x^2)\,dx}{1+\sqrt{0{,}8x^2+1{,}4}}$

№ 2. $\int\limits_{1,2}^{2,64} \frac{(1+1{,}2x^2)\,dx}{0{,}8+\sqrt{x^2+1{,}3}}$

№ 3. $\int\limits_{0,8}^{2,96} \frac{(1+0{,}7x^2)\,dx}{1{,}5+\sqrt{2x^2+0{,}3}}$

№ 4. $\int\limits_{0,8}^{2,6} \frac{(1+1{,}5x^2)\,dx}{0{,}7+\sqrt{2{,}2x^2+0{,}5}}$

№ 5. $\int\limits_{1,3}^{2,74} \frac{(1+0{,}6x^2)\,dx}{0{,}9+\sqrt{x^2+1{,}5}}$

№ 6. $\int\limits_{0,5}^{2,66} \frac{(1+0{,}3x^2)\,dx}{1{,}2+\sqrt{0{,}6x^2+1{,}2}}$

№ 7. $\int\limits_{0,7}^{2,5} \frac{(1+1{,}5x^2)\,dx}{0{,}5+\sqrt{x^2+0{,}8}}$

№ 8. $\int\limits_{0,9}^{2,34} \frac{(1+0{,}9x^2)\,dx}{1{,}3+\sqrt{0{,}5x^2+1}}$

№ 9. $\int\limits_{1}^{3,16} \frac{(1+0{,}6x^2)\,dx}{1{,}5+\sqrt{0{,}4x^2+2{,}5}}$

№ 10. $\int\limits_{1,1}^{2,9} \frac{(1+0{,}7x^2)\,dx}{0{,}4+\sqrt{x^2+1{,}5}}$

№ 11. $\int\limits_{1,4}^{2,84} \frac{(1+0{,}4x^2)\,dx}{1{,}2+\sqrt{1{,}2x^2+1}}$

№ 12. $\int\limits_{0,4}^{2,56} \frac{(1+0{,}3x^2)\,dx}{0{,}8+\sqrt{0{,}6x^2+1{,}3}}$

№ 13. $\int\limits_{1,2}^{2,64} \frac{(1+0{,}2x^2)\,dx}{0{,}7+\sqrt{0{,}5x^2+1{,}2}}$

№ 14. $\int\limits_{1,3}^{3,46} \frac{(1+0{,}9x^2)\,dx}{1{,}5+\sqrt{0{,}4x^2+0{,}7}}$

№ 15. $\int\limits_{0,5}^{2,3} \frac{(1+1{,}2x^2)\,dx}{1{,}2+\sqrt{0{,}6x^2+1{,}3}}$

№ 16. $\int\limits_{0,6}^{2,4} \frac{(1+0{,}4x^2)\,dx}{1{,}3+\sqrt{0{,}8x^2+0{,}4}}$

№ 17. $\int\limits_{1,2}^{2,64} \frac{(1+0{,}4x^2)\,dx}{0{,}8+\sqrt{0{,}7x^2+1{,}3}}$

№ 18. $\int\limits_{0,8}^{2,96} \frac{(1+0{,}6x^2)\,dx}{1{,}4+\sqrt{2x^2+0{,}5}}$

№ 19. $\int\limits_{0,8}^{2,6} \frac{(1+0{,}9x^2)\,dx}{0{,}7+\sqrt{1{,}2x^2+0{,}5}}$

№ 20. $\int\limits_{1,3}^{2,74} \frac{(1+0{,}6x^2)\,dx}{1{,}9+\sqrt{0{,}7x^2+1{,}5}}$

№ 21. $\int\limits_{0,5}^{2,66} \frac{(1+0{,}6x^2)\,dx}{1{,}4+\sqrt{0{,}6x^2+1{,}5}}$

№ 22. $\int\limits_{0,7}^{2,5} \frac{(1+0{,}5x^2)\,dx}{1{,}5+\sqrt{2x^2+0{,}4}}$

№ 23. $\int\limits_{0,9}^{2,34} \frac{(1+0{,}7x^2)\,dx}{0{,}8+\sqrt{0{,}4x^2+1{,}3}}$

№ 24. $\int\limits_{1}^{3,16} \frac{(1+0{,}8x^2)\,dx}{1{,}3+\sqrt{0{,}4x^2+2{,}1}}$

№ 25. $\int\limits_{1,1}^{2,9} \frac{(1+0{,}4x^2)\,dx}{0{,}7+\sqrt{1{,}1x^2+1{,}2}}$

№ 26. $\int\limits_{1,4}^{2,84} \frac{(1+0{,}8x^2)\,dx}{1{,}5+\sqrt{0{,}4x^2+1}}$

№ 27. $\int\limits_{0.4}^{2.56} \frac{(1+0.5x^2)\,dx}{1.2+\sqrt{0.6x^2+1.5}}$

№ 28. $\int\limits_{1,2}^{2,64} \frac{(1+0,3x^2)\,dx}{0,9+\sqrt{1,2x^2+0,5}}$

№ 29. $\int\limits_{1.3}^{3.46} \frac{(1+1,2x^2)\,dx}{2.3+\sqrt{0,4x^2+3,2}}$

№ 30. $\int\limits_{0,5}^{2,3} \frac{(1+0,6x^2)\,dx}{2,5+\sqrt{0,3x^2+1,6}}$

Образец выполнения задания

$$I=\int\limits_{1,2}^{3,36} \frac{(1+0,4x^2)\,dx}{2+\sqrt{0,5x^2+1,3}}.$$

Воспользуемся формулой «трех восьмых», выражающей данный интеграл через суммы значений подынтегральной функции:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left(\sum\nolimits_1+3\sum\nolimits_2+2\sum\nolimits_3\right),$$

где $h=\frac{b-a}{n}$; $\sum_1=y_0+y_n$; $\sum_2=y_1+y_2+y_4+y_5+\ldots$; $\sum_3=y_3+y_6+y_9+\ldots$, число разбиений n должно быть кратным трем.

I. $n_1=9$; $h_1=\frac{3,36-1,2}{9}=0,24.$

Вычисления запишем в следующей таблице:

i	x_i	$1+0{,}4x_i^2$	$2+\sqrt{0{,}5x_i^2+1{,}3}$	$y_{0,9}$	$y_{1,2,4,5,7,8}$	$y_{3,6}$
0	1,2	1,576	3,42127	0,46065		
1	1,44	1,82944	3,52866		0,51845	
2	1,68	2,12896	3,64657		0,58383	
3	1,92	2,47456	3,77291			0,65588
4	2,16	2,86624	3,90599		0,73381	
5	2,40	3,304	4,04450		0,81691	
6	2,64	3,78784	4,18742			0,90458
7	2,88	4,31776	4,33392		0,99627	
8	3,12	4,89376	4,48338		1,09153	
9	3,36	5,51584	4,63530	1,18996		
				1,65061	4,74080	1,56046
				$\sum_1$	$\sum_2$	$\sum_3$

$$I_1=\frac{3\cdot 0,24}{8}(1,65061+3\cdot 4,74080+2\cdot 1,56046)=1,709453.$$

II. $n_2=12$; $h_1=\dfrac{3{,}36-1{,}2}{12}=0{,}18$.

Составим таблицу

i	x_i	$1+0{,}4x_i^2$	$2+\sqrt{0{,}5x_i^2+1{,}3}$	$y_{0,12}$	$y_{1,2,4,5,7,8,10,11}$	$y_{3,6,9}$
0	1,2	1,576	3,42127	0,46065		
1	1,38	1,76176	3,50073		0,50325	
2	1,56	1,97344	3,58644		0,55025	
3	1,74	2,21104	3,67744			0,60124
4	1,92	2,47456	3,77299		0,65588	
5	2,10	2,764	3,87216		0,71381	
6	2,28	3,07936	3,97464			0,77475
7	2,46	3,42064	4,07986		0,83842	
8	2,64	3,78784	4,18742		0,90458	
9	2,82	4,18096	4,29700			0,97300
10	3,00	4,6000	4,40832		1,04348	
11	3,18	5,04496	4,52115		1,11586	
12	3,36	5,51584	4,63530	1,18996		
				1,65061	6,32553	2,34899
				$\sum_1$	$\sum_2$	$\sum_3$

$I_2=\dfrac{3\cdot 0{,}18}{8}(1{,}65061+3\cdot 6{,}32553+2\cdot 2{,}34899)=1{,}709450$. Полученные результаты совпадают с точностью до стотысячных, поэтому принимаем $I\approx 1{,}70945$.

Работа 5

Задание. 1) Применяя экстраполяцию по Ричардсону, вычислить интеграл $\int\limits_a^{a+3}\sqrt{x^2+b}\,dx$ по формуле трапеций при $n_1=3$, $n_2=6$ и найти его уточненное значение; $a=0{,}1k$, $b=4-0{,}1k$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 30$ (k — номер варианта).

2) Применяя экстраполяцию по Ричардсону, вычислить интеграл $\int\limits_c^{c+4}\lg(x^2+2)\,dx$ по формуле Симпсона при $n_1=2$, $n_2=4$ и найти его уточненное значение; $c=3-0{,}1k$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 30$.

Образец выполнения задания

1) $I=\int\limits_{0,5}^{3,5}\sqrt{2x^2+3}\,dx$; 2) $I=\int\limits_2^6\ln(x^2+3{,}5)\,dx$.

1) Если $n_1=3$, то $h_1=(b-a)/n_1=(3{,}5-0{,}5)/3=1$; если $n_2=6$, то $h_2=(b-a)/n_2=(3{,}5-0{,}5)/6=0{,}5$. Составим таблицу значений подынтегральной функции $y(x)=\sqrt{2x^2+3}$ с шагом $h_2=0{,}5$, причем $x_i=0{,}5+ih$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$.

i	x_i	$2x_i^2$	$y_0,\ y_6$	$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_5$
0	0,5	0,5	1,871	
1	1,0	2,0		1,236
2	1,5	4,5		2,739
3	2,0	8,0		3,317
4	2,5	12,5		3,937
5	3,0	18,0		4,583
6	3,5	24,5	5,244	
$\sum$			7,115	16,812

Используя формулу трапеций, получим:
при $n=3$:

$$I_1=h_1\left(\frac{y_0+y_i}{2}+y_2+y_4\right)=1\cdot\left(\frac{7{,}115}{2}+2{,}739+3{,}937\right)=10{,}234;$$

при $n_2=6$:

$$I_2=h_2\left(\frac{y_0+y_i}{2}+\sum_{i=1}^{5}y_i\right)=0{,}5\left(\frac{7{,}115}{2}+16{,}812\right)=10{,}185.$$

Найдем уточненное значение интеграла по формуле

$$I_{1,2}=I_2+\frac{n_1^m}{n_2^m-n_1^m}(I_2-I_1).$$

Так как для формулы трапеций $m=2$, то

$$I_{1,2}=10{,}185+\frac{3^2}{6^2-3^2}\cdot(10{,}185-10{,}234)=$$

$$=10{,}185+\frac{1}{3}\cdot(-0{,}049)=10{,}185-0{,}016=10{,}169.$$

Ответ: $I\approx 10{,}169$.

2) Если $n_1=2$, то $h_1\approx(b-a)/n_1=(6-2)/2=2$; если $n_2=4$, то $h_2=(b-a)/n_2=(6-2)/4=1$. Составим таблицу значений подынтегральной функции $y(x)=\lg(x^2+3{,}5)$ с шагом $h_2=1$, причем $x_i=2+ih$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

i	x_i	$x_i^2+3.5$	$\lg(x_i^2+3,5)$
0	2	7,5	0,8751
1	3	12,5	1,0969
2	4	19,5	1,2900
3	5	28,5	1,4548
4	6	39,5	1,5966

Используя формулу Симпсона, получим:
при $n_1=2$:

$$I_1 \approx \frac{h_1}{3}(y_0+4y_2+y_4)=\frac{2}{3}(0{,}8751+4\cdot 1{,}2900+1{,}5966)=5{,}0878;$$

при $n_2=4$:

$$I_2 \approx \frac{h_2}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4)=$$

$$=\frac{1}{3}(0{,}8751+4\cdot 1{,}0969+2\cdot 1{,}2900+4\cdot 1{,}4548+1{,}5966)=5{,}0862.$$

Найдем уточненное значение интеграла, считая $m=4$:

$$I_{1,2}=5{,}0862+\frac{2^4}{4^4-2^4}\cdot(5{,}0862-5{,}0878)=$$

$$=5{,}0862+\frac{1}{15}(-0{,}016)=5{,}0862-0{,}001=5{,}0861.$$

Ответ: $I \approx 5{,}0861$.

Работа 6

Задание. Вычислить интеграл по формуле Гаусса, применяя для оценки точности двойной пересчет (при $n_1=4$ и $n_2=5$).

№ 1. $\displaystyle\int_{-0,5}^{1,3} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

№ 2. $\displaystyle\int_{2}^{3,2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

№ 3. $\displaystyle\int_{0,5}^{1,6} \frac{x^2+0{,}5}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

№ 4. $\displaystyle\int_{2,2}^{3,4} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

№ 5. $\displaystyle\int_{1,2}^{2} \frac{x-0{,}5}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

№ 6. $\displaystyle\int_{2,2}^{3,8} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$.

№ 7. $\displaystyle\int_{0,2}^{2,4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}\,dx$.

№ 8. $\displaystyle\int_{1}^{2,6} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3}}$.

№ 9. $\displaystyle\int_{0,8}^{1,6} \frac{0{,}5x+2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

№ 10. $\displaystyle\int_{-0,4}^{1,6} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

№ 11. $\displaystyle\int_{-0,8}^{1,4} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

№ 12. $\displaystyle\int_{2,6}^{3,4} \frac{x+0{,}5}{\sqrt{x^2+1{,}5}}\,dx$.

№ 13. $\int\limits_{0,8}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

№ 14. $\int\limits_{2,4}^{3,2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+2}}$.

№ 15. $\int\limits_{0,2}^{2} \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

№ 16. $\int\limits_{0,7}^{1,5} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

№ 17. $\int\limits_{0,2}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}\,dx$.

№ 18. $\int\limits_{1,4}^{2,6} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$.

№ 19. $\int\limits_{2,2}^{3,4} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

№ 20. $\int\limits_{0,4}^{1,6} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

№ 21. $\int\limits_{-2,5}^{-1,3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1,8}}$.

№ 22. $\int\limits_{0,4}^{1,8} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

№ 23. $\int\limits_{0,6}^{2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

№ 24. $\int\limits_{1,6}^{2,8} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+1,2}}$.

№ 25. $\int\limits_{0,2}^{1,11} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+2,5}\,dx$.

№ 26. $\int\limits_{0,6}^{1,8} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+1,7}}$.

№ 27. $\int\limits_{0,4}^{1,8} \frac{x^2+1,4}{\sqrt{x^2+0,2}}\,dx$.

№ 28. $\int\limits_{2,2}^{2,8} \frac{(4-x)\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

№ 29. $\int\limits_{0,8}^{1,5} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2,4}}$.

№ 30. $\int\limits_{0,4}^{1,7} \frac{x+2,2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Образец выполнения задания

$$I=\int\limits_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{x^2+1,2}}\,dx.$$

Формула Гаусса имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[C_1 f(x_1)+C_2 f(x_2)+\ \ldots\ +C_n f(x_n)\right],$$

где $x_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot t_i\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

В данном примере $x_i=\frac{2,7+1,6}{2}+\frac{2,7-1,6}{2}t_i=2,15+0,55t_i$, а значения C_i и t_i берем из таблицы квадратурных коэффициентов Гаусса.

Вычисления удобно располагать в таблице. При $n=4$ имеем:

C_i	t_i	x_i	$x_i^2+1,2$	$\sqrt{x_i^2+1,2}$	$f(x_i)$	$C_i f(x_i)$
0,34785	−0,86114	1,6764	4,0103	2,0026	1,2366	0,43015
0,65215	−0,33998	1,9630	5,0534	2,22480	1,2291	0,80155
0,65215	0,33998	2,3370	6,6616	2,5810	1,2154	0,79264
0,34785	0,86114	2,6236	8,0833	2,8431	1,2042	0,41887
						$\sum=2,44321$

Следовательно, $I \approx 0{,}55 \cdot 2{,}44321 = 1{,}3438$.

При $n=5$ имеем:

C_i	t_i	x_i	$x_i^2+1{,}2$	$\sqrt{x_i^2+1{,}2}$	$f(x_i)$	$C_i f(x_i)$
0,23693	−0,90618	1,6516	3,9278	1,9819	1,2370	0,2903
0,47863	−0,538469	1,8538	4,6366	2,1533	1,2324	0,58988
0,56889	0	2,1500	5,8225	2,4130	1,2225	0,69549
0,47863	0,538469	2,4462	7,1839	2,6803	1,2111	0,57968
0,23693	0,90618	2,6484	8,2140	2,8660	1,2032	0,28508
						$\sum = 2{,}44321$

Значит, $I \approx 0{,}55 \cdot 2{,}44321 = 1{,}3438$. Совпадение результатов свидетельствует о правильности вычислений.

Глава IX

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа 1

Задание. Составить решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка усовершенствованным методом ломаных на отрезке $[0{,}2;\ 1{,}2]$ с шагом $=0{,}1$ при начальном условии $y(0{,}2)=0{,}25$. Все вычисления выполнять с четырьмя десятичными знаками.

№ 1. $y' = 0{,}133(x^2 + \sin 2x) + 0{,}872y$.
№ 2. $y' = 0{,}215(x^2 + \cos 1{,}5x) + 1{,}283y$.
№ 3. $y' = 0{,}158(x^2 + \sin 0{,}8x) + 1{,}164y$.
№ 4. $y' = 0{,}173(x^2 + \cos 0{,}7x) + 0{,}754y$.
№ 5. $y' = 0{,}221(x^2 + \sin 1{,}2x) + 0{,}452y$.
№ 6. $y' = 0{,}163(x^2 + \cos 0{,}4x) + 0{,}635y$.
№ 7. $y' = 0{,}218(x^2 + \sin 1{,}6x) + 0{,}718y$.
№ 8. $y' = 0{,}145(x^2 + \cos 0{,}5x) + 0{,}842y$.
№ 9. $y' = 0{,}213(x^2 + \sin 1{,}8x) + 0{,}368y$.
№ 10. $y' = 0{,}127(x^2 + \cos 0{,}6x) + 0{,}573y$.
№ 11. $y' = 0{,}232(x^2 + \sin 1{,}4x) + 1{,}453y$.
№ 12. $y' = 0{,}417(x^2 + \cos 0{,}8x) + 0{,}972y$.
№ 13. $y' = 0{,}324(x^2 + \sin 1{,}5x) + 1{,}612y$.
№ 14. $y' = 0{,}263(x^2 + \cos 1{,}2x) + 0{,}453y$.
№ 15. $y' = 0{,}372(x^2 + \sin 0{,}7x) + 0{,}758y$.
№ 16. $y' = 0{,}343(x^2 + \cos 0{,}4x) + 1{,}315y$.
№ 17. $y' = 0{,}276(x^2 + \sin 1{,}6x) + 0{,}988y$.
№ 18. $y' = 0{,}173(x^2 + \cos 0{,}6x) + 1{,}534y$.
№ 19. $y' = 0{,}258(x^2 + \sin 0{,}4x) + 0{,}724y$.
№ 20. $y' = 0{,}317(x^2 + \cos 1{,}4x) + 1{,}344y$.
№ 21. $y' = 0{,}166(x^2 + \sin 1{,}1x) + 0{,}883y$.
№ 22. $y' = 0{,}215(x^2 + \cos 0{,}9x) + 1{,}213y$.
№ 23. $y' = 0{,}188(x^2 + \sin 1{,}5x) + 0{,}885y$.

№ 24. $y'=0{,}314(x^2+\cos 0{,}6x)+0{,}772y$.
№ 25. $y'=0{,}418(x^2+\sin 1{,}2x)+1{,}344y$.
№ 26. $y'=0{,}273(x^2+\cos 1{,}3x)+0{,}687y$.
№ 27. $y'=0{,}176(x^2+\sin 0{,}8x)+1{,}247y$.
№ 28. $y'=0{,}245(x^2+\cos 0{,}4x)+1{,}452y$.
№ 29. $y'=0{,}184(x^2+\sin 0{,}6x)+0{,}747y$.
№ 30. $y'=0{,}212(x^2+\cos 1{,}2x)+1{,}544y$.

Образец выполнения задания

$$y'=0{,}185(x^2+\cos 0{,}7x)+1{,}843y.$$

Используем формулу $y_{i+1}=y_i+hy'_{i+\frac{1}{2}}$, где

$$y'_{i+\frac{1}{2}}=y'\left(x_i+\frac{h}{2};\ y_{i+\frac{1}{2}}\right),\quad y_{i+\frac{1}{2}}=y_i+\frac{h}{2}y_i.$$

Все вычисления представим в таблице (учитывая, что $h/2=0{,}05$):

i	x_i	y_i	y'_i	$\frac{h}{2}\cdot y'_i$	$x_i+\frac{h}{2}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$y'_{i+\frac{1}{2}}$	$hy'_{i+\frac{1}{2}}$
0	0,2	0,25	0,6513	0,0326	0,25	0,2826	0,7145	0,0715
1	0,3	0,3215	0,7901	0,0395	0,35	0,3610	0,8675	0,0868
2	0,4	0,4083	0,9599	0,0480	0,45	0,4563	1,0543	0,1054
3	0,5	0,5137	1,1668	0,0583	0,55	0,5720	1,2816	0,1282
4	0,6	0,6419	1,4185	0,0709	0,65	0,7128	1,5581	0,1558
5	0,7	0,7977	1,7240	0,0862	0,75	0,8839	1,8932	0,1893
6	0,8	0,9870	2,0942	0,1047	0,85	1,0917	2,2989	0,2299
7	0,9	1,2169	2,5421	0,1271	0,95	1,3440	2,7895	0,2790
8	1,0	1,4959	3,0834	0,1542	1,05	1,6501	3,3823	0,3382
9	1,1	1,8341	3,7369	0,1868	1,15	2,0209	4,0974	0,4097
10	1,2	2,2438	—	—	—	—	—	—

Решение дает значения x_i, y_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 10)$, полученные в процессе вычислений (первые два столбца таблицы).

Работа 2

Задание. Составить решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера—Коши. Воспользоваться вариантами работы 1. Вычисления выполнять с четырьмя десятичными знаками. В ответ включить цифры, совпавшие при решении в работах 1 и 2.

Образец выполнения задания

$$y'=0{,}185(x^2+\cos 0{,}7x)+1{,}843y.$$

Используем формулу

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(y'_i+\tilde{y}_{i+1}),$$

где $\tilde{y}_{i+1}=y'(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, $\tilde{y}_{i+1}=y_i+hy_i$. Все вычисления представим в таблице:

i	x_i	y_i	y'_i	hy'_i	$\tilde{y}_{i+1}$	$\tilde{y}'_{i+1}$	$y'_i+\tilde{y}'_{i+1}$	$\frac{h}{2}(y'_i+\tilde{y}'_{i+1})$
0	0,2	0,25	0,6513	0,0651	0,3151	0,7784	1,4297	0,0715
1	0,3	0,3215	0,7901	0,0790	0,4005	0,9455	1,7356	0,0868
2	0,4	0,4083	0,9599	0,0960	0,5043	1,1495	2,1094	0,1055
3	0,5	0,5138	1,1670	0,1167	0,6305	1,3975	2,5645	0,1282
4	0,6	0,6420	1,4187	0,1419	0,7839	1,6986	2,1173	0,1559
5	0,7	0,7979	1,7244	0,1724	0,9703	2,0635	3,7879	0,1894
6	0,8	0,9873	2,0947	0,2095	1,1968	2,5050	4,5997	0,2300
7	0,9	1,2173	2,5428	0,2543	1,4716	3,0386	5,5814	0,2791
8	1,0	1,4964	3,0844	0,3084	1,8048	3,6830	6,7674	0,3384
9	1,1	1,8348	3,7382	0,3738	2,2086	4,4604	8,1986	0,4099
10	1,2	2,2447						

Решение дают значения x_i, y_i $(i=0, 1, 2, ..., 10)$ (первые два столбца таблицы).

Сравнивая найденное решение с решением, полученным в работе 1, видим, что они расходятся в последних цифрах, поэтому в ответ включим значения, округленные до тысячных.

Ответ:

x_i	y_i	x_i	y_i
0,2	0,25	0,8	0,987
0,3	0,322	0,9	1,217
0,4	0,408	1,0	1,496
0,5	0,514	1,1	1,835
0,6	0,642	1,2	2,245
0,7	0,797		

Работа 3

Задание. Используя метод Эйлера с уточнением, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$ на отрезке $[a, b]$; шаг $h=0{,}1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

№ 1. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{5}}$, $y_0(1{,}8)=2{,}6$, $x\in[1{,}8;\ 2{,}8]$.

№ 2. $y'=x+\cos\frac{y}{3}$, $y_0(1{,}6)=4{,}6$, $x\in[1{,}6;\ 2{,}6]$.

№ 3. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{10}}$, $y_0(0{,}6)=0{,}8$, $x\in[0{,}6;\ 1{,}6]$.

№ 4. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{7}}$, $y_0(0{,}5)=0{,}6$, $x\in[0{,}5;\ 1{,}5]$.

№ 5. $y'=x+\cos\frac{y}{\pi}$, $y_0(1{,}7)=5{,}3$, $x\in[1{,}7;\ 2{,}7]$.

№ 6. $y'=x+\cos\frac{y}{2{,}25}$, $y_0(1{,}4)=2{,}2$ $x\in[1{,}4;\ 2{,}4]$.

№ 7. $y'=x+\cos\frac{y}{e}$, $y_0(1{,}4)=2{,}5$, $x\in[1{,}4;\ 2{,}4]$.

№ 8. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{2}}$, $y_0(0{,}8)=1{,}4$, $x\in[0{,}8;\ 1{,}8]$.

№ 9. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{3}}$, $y_0(1{,}2)=2{,}1$, $x\in[1{,}2;\ 2{,}2]$.

№ 10. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{11}}$, $y_0(2{,}1)=2{,}5$, $x\in[2{,}1;\ 3{,}1]$.

№ 11. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{5}}$, $y_0(1{,}8)=2{,}6$, $x\in[1{,}8;\ 2{,}8]$.

№ 12. $y'=x+\sin\frac{y}{3}$, $y_0(1{,}6)=4{,}6$, $x\in[1{,}6;\ 2{,}6]$.

№ 13. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{10}}$, $y_0(0{,}6)=0{,}8$, $x\in[0{,}6;\ 1{,}6]$.

№ 14. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{7}}$, $y_0(0{,}5)=0{,}6$, $x\in[0{,}5;\ 1{,}5]$.

№ 15. $y'=x+\sin\frac{y}{\pi}$, $y_0(1{,}7)=5{,}3$, $x\in[1{,}7;\ 2{,}7]$.

№ 16. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{2{,}8}}$, $y_0(1{,}4)=2{,}2$, $x\in[1{,}4;\ 2{,}4]$.

№ 17. $y'=x+\sin\frac{y}{e}$, $y_0(1{,}4)=2{,}5$, $x\in[1{,}4;\ 2{,}4]$.

№ 18. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{2}}$, $y_0(0{,}8)=1{,}3$, $x\in[0{,}8;\ 1{,}8]$.

№ 19. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{3}}$, $y_0(1{,}1)=1{,}5$, $x\in[1{,}1;\ 2{,}1]$.

№ 20. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{11}}$, $y_0(0{,}6)=1{,}2$, $x\in[0{,}6;\ 1{,}6]$.

№ 21. $y'=x+\sin\frac{y}{1{,}25}$, $y_0(0{,}5)=1{,}8$, $x\in[0{,}5;\ 1{,}5]$.

№ 22. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{15}}$, $y_0(0{,}2)=1{,}1$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}2]$.

№ 23. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$, $y_0(0{,}1)=0{,}8$, $x\in[0{,}1;\ 1{,}1]$.

№ 24. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$, $y_0(0{,}5)=0{,}6$, $x\in[0{,}5;\ 1{,}5]$.

№ 25. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$, $y_0(1{,}2)=1{,}4$, $x\in[1{,}2;\ 2{,}2]$.

№ 26. $y'=x+\cos\frac{y}{1{,}25}$, $y_0(0{,}4)=0{,}8$, $x\in[0{,}4;\ 1{,}4]$.

№ 27. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{1{,}5}}$, $y_0(0{,}3)=0{,}9$, $x\in[0{,}3;\ 1{,}3]$.

№ 28. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{1{,}3}}$, $y_0(1{,}2)=1{,}8$, $x\in[1{,}2;\ 2{,}2]$.

№ 29. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{0{,}3}}$, $y_0(0{,}7)=2{,}1$, $x\in[0{,}7;\ 1{,}7]$.

№ 30. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{0{,}7}}$, $y_0(0{,}9)=1{,}7$, $x\in[0{,}9;\ 1{,}9]$.

Образец выполнения задания

$$y'=x+\sin\frac{y}{2{,}25};\quad y_0(1{,}4)=2{,}2,\quad x\in[1{,}4;\ 2{,}4].$$

Метод Эйлера с уточнением заключается в том, что каждое значение $y_{k+1}=y(x_{k+1})$, где $y(x)$ — искомая функция, а $x_{k+1}=x_0+h(k+1)$, $k=0$, 1, 2, ..., определяется следующим образом:

за начальное приближение берется

$$y_{k+1}^{(0)}=y_k+hf(x_k,\ y_k),\quad \text{где}\quad f(x,\ y)=y'(x,\ y);$$

найденное значение $y_{k+1}^{(0)}$ уточняется по формуле

$$y_{k+1}^{(i)}=y_k+\frac{h}{2}\left[f(x_k,\ \ y_k)+f\left(x_{k+1},\ y_{k+1}^{(i-1)}\right)\right]\quad (i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Уточнение продолжают до тех пор, пока в пределах требуемой точности два последовательных приближения не совпадут.

Все описанные вычисления удобно производить, составив следующие таблицы:

основную таблицу, в которой записывается ответ примера (табл. I);

таблицу, в которой выполняется процесс последовательных приближений (табл. II);

вспомогательную таблицу, в которой вычисляются значения функции $f(x_k,\ y_k)$ (табл. III).

Таблица I

k	x_k	y_k	$f_k=f(x_k, y_k)$	hf_k
0	1,4	2,2	2,2292	0,2229
1	1,5	2,4306	2,3821	0,2382
2	1,6	2,6761	2,5281	0,2528
3	1,7	2,9357	2,6648	0,2665
4	1,8	3,2084	2,7895	0,2790
5	1,9	3,4929	2,8998	0,2900
6	2,0	3,7876	2,9936	0,2994
7	2,1	4,0908	3,0696	0,3070
8	2,2	4,4006	3,1268	0,3127
9	2,3	4,7152	3,1654	0,3165
10	2,4	5,0328		

Таблица II

$k+1$	x_{k+1}	y_k	i	$y_{k+1}^{(i)}$	f_k	$f_{k+1}^{(i)}$	$f_k+f_{k+1}^{(i)}$	$\frac{h}{2}(f_k+f_{k+1}^{(i)})$
1	1,5	2,2	0	2,4229	2,2292	2,3805	4,6097	0,2305
			1	2,4305		2,3820	4,6112	0,2306
			2	2,4306		2,3821	4,6113	0,2306
2	1,6	2,4306	0	2,6688	2,3821	2,5268	4,9089	0,2454
			1	2,6760		2,5280	4,9101	0,2455
			2	2,6761		2,5281	4,9102	0,2455
3	1,7	2,6761	0	2,9289	2,5281	2,6641	5,1922	0,2596
			1	2,9357		2,6648	5,1929	0,2596
4	1,8	2,9357	0	3,2022	2,6648	2,7892	5,4540	0,2727
			1	3,2084		2,7895	5,4543	0,2727
5	1,9	3,2084	0	3,4874	2,7895	2,8998	5,6893	0,2845
			1	3,4929		2,8998	5,6893	0,2845
6	2,0	3,4929	0	3,7829	2,8998	2,9939	5,8937	0,2947
			1	3,7876		2,9936	5,8934	0,2947
7	2,1	3,7876	0	4,0870	2,9936	3,0700	6,0636	0,3032
			1	4,0908		3,0696	6,0632	0,3032
8	2,2	4,0908	0	4,3978	3,0696	3,1273	6,1969	0,3098
			1	4,4006		3,1268	6,1964	0,3098
9	2,3	4,4006	0	4,7133	3,1268	3,1658	6,2926	0,3146
			1	4,7152		3,1654	6,2922	0,3146
10	2,4	4,7152	0	5,0517	3,1654	3,1866	6,3520	0,3176
			1	5,0328		3,1863	6,3517	0,3176

Таблица III

k	x	y	$\frac{y}{2,25}$	$\sin\frac{y}{2,25}$	$y'=x+\sin\frac{y}{2,25}$
0	1,4	2,2	0,9778	0,8292	2,2292
1	1,5 1,5 1,5	2,4229 2,4305 2,4306	1,0768 1,0802 1,0803	0,8805 0,8820 0,8821	2,3805 2,3820 2,3821
2	1,6 1,6 1,6	2,6688 2,6760 2,6761	1,1861 1,1893 1,1894	0,9268 0,9280 0,9281	2,5268 2,5280 2,5281
3	1,7 1,7	2,9289 2,9357	1,3017 1,3048	0,9641 0,9648	2,6641 2,6648
4	1,8 1,8	3,2022 3,2084	1,4232 1,4260	0,9892 0,9895	2,7822 2,7895
5	1,9 1,9	3,4874 3,4929	1,5500 1,5524	0,9998 0,9998	2,8998 2,8998
6	2,0 2,0	3,7829 3,7876	1,6813 1,6834	0,9939 0,9936	2,9939 2,9936
7	2,1 2,1	4,0870 4,0908	1,8164 1,8181	0,9700 0,9696	3,0700 3,0696
8	2,2 2,2	4,3978 4,4006	1,9546 1,9558	0,9273 0,9268	3,1273 3,1268
9	2,3 2,3	4,7133 4,7152	2,0948 2,0956	0,8658 0,8654	3,1658 3,1654
10	2,4 2,4	5,0317 5,0328	2,2363 2,2368	0,7866 0,7863	3,1866 3,1863

Ответом являются значения $y_k(x)$, полученные в табл. I.

Работа 4

Задание. Используя метод Адамса со вторыми разностями, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$ на отрезке $[0, 1]$; шаг $h=0,1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками. Начальный отрезок определить методом Рунге—Кутта.

№ 1. $y'=1+0{,}2y\sin x-y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 2. $y'=\cos(x+y)+0{,}5(x-y),\ \ y(0)=0.$

№ 3. $y'=\dfrac{\cos x}{x+1}-0{,}5y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 4. $y'=(1-y^2)\cos x+0{,}6y,\ \ y(0)=0.$

№ 5. $y'=1+0{,}4y\sin x-1{,}5y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 6. $y'=\dfrac{\cos y}{x+2}+0{,}3y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 7. $y'=\cos(1{,}5x+y)+(x-y),\ \ y(0)=0.$

№ 8. $y'=1-\sin(x+y)+\dfrac{0{,}5y}{x+2},\ \ y(0)=0.$

№ 9. $y'=\dfrac{\cos y}{1{,}5+x}+0{,}1y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 10. $y'=0{,}6\sin x-1{,}25y^2+1,\ \ y(0)=0.$

№ 11. $y'=\cos(2x+y)+1{,}5(x-y),\ \ y(0)=0.$

№ 12. $y'=1-\dfrac{0{,}1y}{x+2}-\sin(2x+y),\ \ y(0)=0.$

№ 13. $y'=\dfrac{\cos y}{1{,}25+x}-0{,}1y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 14. $y'=1+0{,}8y\sin x-2y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 15. $y'=\cos(1{,}5x+y)+1{,}5(x-y),\ \ y(0)=0.$

№ 16. $y'=1-\sin(2x+y)+\dfrac{0{,}3y}{x+2},\ \ y(0)=0.$

№ 17. $y'=\dfrac{\cos y}{1{,}75+x}-0{,}5y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 18. $y'=1+(1-x)\sin y-(2+x)y,\ \ y(0)=0.$

№ 19. $y'=(0{,}8-y^2)\cos x+0{,}3y,\ \ y(0)=0.$

№ 20. $y'=1+2{,}2\sin x+1{,}5y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 21. $y'=\cos(x+y)+0{,}75(x-y),\ \ y(0)=0.$

№ 22. $y'=1-\sin(1{,}25x+y)+\dfrac{0{,}5y}{x+2},\ \ y(0)=0.$

№ 23. $y'=\dfrac{\cos y}{x+2}-0{,}3y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 24. $y'=1-\sin(1{,}75x+y)+\dfrac{0{,}1y}{x+2},\ \ y(0)=0.$

№ 25. $y'=\dfrac{\cos y}{1{,}25+x}-0{,}5y^2,\ \ y(0)=0.$

№ 26. $y' = \cos(1{,}5x + y) - 2{,}25(x + y), \quad y(0) = 0.$

№ 27. $y' = \dfrac{\cos y}{1{,}5 + x} - 1{,}25y^2, \quad y(0) = 0.$

№ 28. $y' = 1 - (x - 1)\sin y + 2(x + y), \quad y(0) = 0.$

№ 29. $y' = 1 - \sin(0{,}75x - y) + \dfrac{1{,}75y}{x + 1}, \quad y(0) = 0.$

№ 30. $y' = \cos(x - y) + \dfrac{1{,}25y}{1{,}5 + x}, \quad y(0) = 0.$

Образец выполнения задания

$$y' = 1 + 0{,}2y\sin x - 1{,}5y^2 = f(x, y); \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad h = 0{,}1.$$

---

1. Определим значения $y_1 = y(0, 1)$, $y_2 = y(0{,}2)$ (начальный отрезок) методом Рунге — Кутта. При этом значения $y_{i+1} = y(x_{i+1})$, где $x_{i+1} = x_i + h$, находятся по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right);$$

где

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i),$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right).$$

Все вычисления будем располагать в таблице (см. табл. I).

Таблица I

x	$y(x)$	$\sin x$	$0{,}2y \cdot \sin x$	$-1{,}5y^2$	$f(x, y)$	$hf(x, y)$	Δy
0	0	0	0	0	1	0,1	0,1000
0,05 0,05 0,10	0,05 0,0498 0,0997	0,0500 0,0500 0,0998	0,0005 0,0005 0,0020	−0,0038 −0,0037 −0,0149	0,9967 0,9968 0,9871	0,0997 0,0997 0,0987	0,1994 0,1994 0,0987
							0,5979 · (1/6) = = 0,0996
0,10	0,0996	0,0998	0,0020	−0,0149	0,9871	0,0987	0,0987

x	$y(x)$	$\sin x$	$0,2y\cdot\sin x$	$-1,5y^2$	$f(x, y)$	$hf(x, y)$	Δy
0,15	0,1490	0,1494	0,0045	−0,0333	0,9712	0,0971	0,1942
0,15	0,1482	0,1494	0,0044	−0,0329	0,9715	0,0972	0,1944
0,20	0,1968	0,1987	0,0078	−0,0581	0,9497	0,0950	0,0950
							0,5823·(1/6)= =0,0970
0,20	0,1966	0,1987	0,0078	−0,0580	0,9498		

2. Вычисление последующих значений $y_i=y(x_i)$, где $x_i=x_0+ih$ $(i=3, 4, \ldots)$, производим по формуле Адамса со вторыми разностями

$$y_{i+1}=y_i+q_i+\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}, \text{ где } q_i=hf(x_i, y_i).$$

Вычисления производим в следующих таблицах (табл. II, III и IV). Табл. II содержит окончательные значения $y(x_i)$ и значения конечных разностей, имеющихся в вычислительной формуле.

Таблица II

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$q_i=hf_i$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$
0	0	0	0,1000	0,10000	−0,00129	−0,00244
1	0,1	0,0996	0,9871	0,09871	−0,00373	−0,00204
2	0,2	0,1966	0,9498	0,09498	−0,00577	−0,00154
3	0,3	0,2887	0,8921	0,08921	−0,00731	−0,00088
4	0,4	0,3742	0,8190	0,08190	−0,00819	−0,00035
5	0,5	0,4518	0,7371	0,07371	−0,00854	0,00008
6	0,6	0,5210	0,6517	0,06517	−0,00846	0,00049
7	0,7	0,5818	0,5671	0,05671	−0,00797	0,00067
8	0,8	0,6343	0,4874	0,04874	−0,00730	—
9	0,9	0,6792	0,4144	0,04144	—	—
10	1,0	0,7173	—	—	—	—

В табл. III выполняются расчеты, соответствующие формуле Адамса со вторыми разностями.

Таблица III

i	2	3	4	5
y_i	0,1966	0,28870	0,37418	0,45178
q_i	0,09498	−0,08921	−0,08190	−0,07371
$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	−0,00186	−0,00288	−0,00366	−0,00410
$\frac{5}{12}\Delta q_{i-2}$	−0,0102	−0,00085	−0,00064	−0,00037
y_{i+1}	0,28870	0,37418	0,45178	0,52102

i	6	7	8	9
y_i	0,52102	0,58177	0,63428	0,67924
q_i	0,6517	0,05671	0,04874	0,04144
$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	−0,00427	−0,00423	−0,00398	−0,00365
$\frac{5}{12}\Delta q_{i-2}$	−0,00015	0,00003	0,00020	0,00028
y_{i+1}	0,58177	0,63428	0,67924	0,71731

В табл. IV производится вычисление значений функции

$$y'=f(x_i,\ y_i)=1+0{,}2y_i\sin x_i-1{,}5y_i^2.$$

Таблица IV

x_i	y_i	$0{,}2\sin x_i$	$0{,}2y_i\sin x_i$	$-1{,}5y_i^2$	$f(x_i,\ y_i)$
0,3	0,2887	0,0591	0,0171	−0,1250	0,8921
0,4	0,3742	0,0779	0,0292	−0,2102	0,8190
0,5	0,4518	0,0959	0,0433	−0,3062	0,7371
0,6	0,5210	0,1129	0,0588	−0,4071	0,6517
0,7	0,5818	0,1288	0,0749	−0,5078	0,5671
0,8	0,6343	0,1435	0,0910	−0,6036	0,4874
0,9	0,6792	0,1567	0,1064	−0,6920	0,4144

Ответом являются значения функции $y(x_i)$, полученные в табл. II.

Работа 5

Задание. Используя метод Милна, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y=f(x,\ y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$ на отрезке [0, 1]; шаг $h=0{,}1$; все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками. Начальный отрезок определить методом Рунге — Кутта.

№ 1. $y'=x+y^2,\ \ y(0)=0{,}5.$
№ 2. $y'=2x+0{,}1y^2,\ \ y(0)=0{,}2.$
№ 3. $y'=2x+y^2,\ \ y(0)=0{,}3.$
№ 4. $y'=x^2+xy,\ \ y(0)=0{,}2.$
№ 5. $y'=0{,}2x+y^2,\ \ y(0)=0{,}1.$
№ 6. $y'=x^2+y,\ \ y(0)=0{,}4.$
№ 7. $y'=x^2+2y,\ \ y(0)=0{,}1.$
№ 8. $y'=xy+y^2,\ \ y(0)=0{,}6.$
№ 9. $y'=x^2+y^2,\ \ y(0)=0{,}7.$
№ 10. $y'=x^2+0{,}2y^2,\ \ y(0)=0{,}2.$
№ 11. $y'=0{,}3x+y^2,\ \ y(0)=0{,}4.$
№ 12. $y'=0{,}1x+0{,}2y^2,\ \ y(0)=0{,}3.$
№ 13. $y'=x+0{,}3y^2,\ \ y(0)=0{,}3.$
№ 14. $y'=2x^2+xy,\ \ y(0)=0{,}5.$
№ 15. $y'=0{,}1x^2+2xy,\ \ y(0)=0{,}8.$
№ 16. $y'=x^2+0{,}2xy,\ \ y(0)=0{,}6.$
№ 17. $y'=3x^2+0{,}1xy,\ \ y(0)=0{,}2.$
№ 18. $y'=x^2+3xy,\ \ y(0)=0{,}3.$
№ 19. $y'=x^2+0{,}1y^2,\ \ y(0)=0{,}7.$
№ 20. $y'=2x^2+3y^2,\ \ y(0)=0{,}2.$
№ 21. $y'=0{,}2x^2+y^2,\ \ y(0)=0{,}8.$
№ 22. $y'=0{,}3x^2+0{,}1y^2,\ \ y(0)=0{,}3.$

№ 23. $y'=xy+0{,}1y^2,\ \ y(0)=0{,}5.$

№ 24. $y'=0{,}2xy+y^2,\ \ y(0)=0{,}4.$

№ 25. $y'=0{,}1xy+0{,}3y^2,\ \ y(0)=0{,}2.$

№ 26. $y'=0{,}3xy+y^2,\ \ y(0)=0{,}6.$

№ 27. $y'=xy+0{,}2y^2,\ \ y(0)=0{,}7.$

№ 28. $y'=0{,}1x^2+2y^2,\ \ y(0)=0{,}2.$

№ 29. $y'=3x+0{,}1y^2,\ \ y(0)=0{,}4.$

№ 30. $y'=0{,}2x+3y^2,\ \ y(0)=0{,}2.$

Образец выполнения задания

$$y'=1{,}6x+0{,}5y^2=f(x,\ y);\ \ y(0)=0{,}3.$$

---

1. Определение начального отрезка y_0, y_1, y_2, y_3 произведем по формуле Рунге — Кутта

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}\left(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}\right)\ \ (i=0,\ 1,\ 2),$$

где

$$k_1^{(i)}=hf(x_i,\ y_i),$$

$$k_2^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_4^{(i)}=\frac{1}{6}hf\left(x_i+h,\ y_i+k_3^{(i)}\right).$$

Все необходимые расчеты осуществляем с помощью табл. I, в которой $\Delta y_i=\frac{1}{6}\left(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}\right)$.

Таблица I

i	x	y	$1{,}6x$	$0{,}5y^2$	$f(x,\ y)$	k	Δy_i
0	0 0,05 0,05 0,1	0,3 0,3022 0,3063 0,3127	0 0,08 0,08 0,16	0,045 0,0457 0,0469 0,0489	0,0450 0,1257 0,1269 0,2089	0,00450 0,01257 0,01269 0,02089	0,00450 0,02514 0,025318 0,02089
							0,07591 · (1/6)= =0,0127
1	0,1 0,15 0,15 0,20	0,3127 0,3231 0,3273 0,3421	0,16 0,240 0,240 0,32	0,0489 0,0522 0,0536 0,0585	0,2089 0,2922 0,2936 0,3785	0,02089 0,02922 0,01936 0,03785	0,02099 0,05844 0,05872 0,03785
							0,17590 · (1/6)= =0,0293

i	x	y	$1{,}6x$	$0{,}5y^2$	$f(x, y)$	k	Δy_i
2	0,2 0,25 0,25 0,30	0,3420 0,3609 0,3653 0,3887	0,32 0,40 0,40 0,48	0,0585 0,0651 0,0667 0,0755	0,3785 0,4651 0,4667 0,5555	0,03785 0,04651 0,04667 0,05555	0,03785 0,09302 0,09334 0,05555
							$0{,}27976\cdot(1/6)=$ $=0{,}0466$
3	0,30	0,3886	0,48	0,0755	0,5555		

2. Последующие значения функции $y_{i+1}=y(x_{i+1})$ $(i=3,\ 4,\ \ldots,\ 9)$ будем определять методом Милна. Согласно этому методу, по ходу вычислений следует составить таблицу, содержащую значения y_i и $f(x_i,\ y_i)$ (табл. II).

Таблица II

i	x_i	y_i	$1{,}6x_i$	$0{,}5y_i^2$	$f(x_i, y_i)$
0	0	0,3	0	0,0450	0,0450
1	0,1	0,3127	0,16	0,0489	0,2089
2	0,2	0,3420	0,32	0,0585	0,3785
3	0,3	0,3886	0,48	0,0755	0,5555
4	0,4	0,4534	0,64	0,1028	0,7428
5	0,5	0,5376	0,80	0,1445	0,9445
6	0,6	0,6430	0,96	0,2067	0,1667
7	0,7	0,7719	1,12	0,2979	0,4179
8	0,8	0,9280	1,28	0,4306	1,7105
9	0,9	1,1160	1,44	0,6227	2,0627
10	1,0	1,3434	—	—	—

На каждом шаге вычисление ведется в два этапа. Сначала по первой формуле Милна находим

$$y_i^{(1)}=y_{i-4}+\frac{4h}{3}(2f_{i-3}-f_{i-2}+2f_{i-1}),$$

а затем по второй формуле Милна находим окончательное значение

$$y_i=y_i^{(2)}=y_{i-2}+\frac{h}{3}(f_{i-2}+4f_{i-1}+f_i^{(1)}),$$

где $f_i^{(1)}=f(x_i,\ y_i^{(1)})$.

1. $y_4^{(1)}=y_0+\frac{0{,}4}{3}(2f_1-f_2+2f_3)=0{,}3+\frac{0{,}4}{3}(2\cdot0{,}2089-0{,}3785+2\cdot0{,}5555)=$
$=0{,}4534;$ $f_4^{(1)}=0{,}64+0{,}1028=0{,}7428;$

$y_4^{(2)}=y_2+\frac{h}{3}(f_2+4f_3+f_4^{(1)})=0{,}3420+\frac{0{,}1}{3}(0{,}3785+4\cdot0{,}5555+0{,}7428)=$
$=0{,}4534.$

Из сравнения $y_4^{(1)}$ и $y_4^{(2)}$ имеем $y_4=0{,}4534$.

2. $y_5^{(1)}=y_1+\frac{4h}{3}(2f_2-f_3+2f_4)=0{,}3127+\frac{0{,}4}{3}(2{,}03785-0{,}5555+2\cdot 0{,}7428)=$
$=0{,}5376;\ f_5^{(1)}=0{,}80+0{,}1445=0{,}9445;$

$$y_5^{(2)}=y_3+\frac{h}{3}(f_3+4f_4+f_5^{(1)})=0{,}3886+\frac{0{,}1}{3}(0{,}5555+4\cdot 0{,}7428+0{,}9445)=0{,}5376.$$

Из сравнения $y_5^{(1)}$ и $y_5^{(2)}$ имеем $y_5=0{,}5376$.

3. $y_6^{(1)}=y_2+\frac{4h}{3}(2f_3-f_4+2f_5)=0{,}3420+\frac{0{,}4}{3}(2\cdot 0{,}5555-0{,}7428+2\cdot 0{,}9445)=$
$=0{,}6430;\ f_6^{(1)}=0{,}96+0{,}2067=1{,}1667;$

$$y_6^{(2)}=y_4+\frac{h}{3}(f_4+4f_5+f_6^{(1)})=0{,}4534+\frac{0{,}1}{3}\cdot(0{,}7428+4\cdot 0{,}9445+1{,}1667)=$$
$=0{,}6430.$

4. $y_7^{(1)}=y_3+\frac{4h}{3}(2f_4-f_5+2f_6)=0{,}3886+\frac{0{,}4}{3}(2\cdot 0{,}7428-0{,}9445+2\cdot 1{,}1667)=$
$=0{,}7719;\ y_7^{(1)}=1{,}12+0{,}2979=1{,}4179;$

$$y_7^{(2)}=y_5+\frac{h}{3}(f_5+4f_6+f_7^{(1)})=0{,}5376+\frac{0{,}1}{3}(0{,}9445+4\cdot 1{,}1667+1{,}4179)=0{,}7719.$$

5. $y_8^{(1)}=y_4+\frac{4h}{3}(2f_5-f_6+2f_7)=0{,}4534+\frac{0{,}4}{3}(2\cdot 0{,}9445-1{,}1667)+2\ \times$
$\times\ 1{,}4179)=0{,}9278;\ f_8^{(1)}=1{,}28+0{,}4304=1{,}7104;$

$$y_8^{(2)}=y_6+\frac{h}{3}(f_6+4f_7+f_8^{(1)})=0{,}6430+\frac{0{,}1}{3}(1{,}1667+4\cdot 1{,}4179+1{,}7104)=0{,}9280.$$

6. $y_9^{(1)}=y_5+\frac{4h}{3}(2f_6-f_7+2f_8)=0{,}5376+\frac{0{,}4}{3}(2\cdot 1{,}1667-1{,}4179+2\cdot 1{,}7106)=$
$=1{,}1158;\ f_9^{(1)}=1{,}44+0{,}6225=2{,}0625;$

$$y_9^{(2)}=y_7+\frac{h}{3}(f_7+4f_8+f_9^{(1)})=0{,}7719+\frac{0{,}1}{3}(1{,}4149+4\cdot 1{,}7106+2{,}0625)=1{,}1160.$$

7. $y_{10}^{(1)}=y_6+\frac{4h}{3}(2f_7-f_8+2f_9)=0{,}6430+\frac{0{,}4}{3}(2\cdot 1{,}4179-1{,}7106+2\cdot 2{,}0627)=$
$=1{,}3431;\ f_{10}^{(1)}=1{,}6+0{,}9020=2{,}5020;$

$$y_{10}^{(2)}=y_8+\frac{h}{3}(f_8+3f_9+f_{10}^{(1)})=0{,}9280+\frac{0{,}1}{3}(1{,}7106+4\cdot 2{,}0627+2{,}5020)=1{,}3434.$$

Ответом являются значения функции, приведенные в табл. II.

Работа 6

Задание. Используя метод конечных разностей, составить решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с точностью $\varepsilon=10^{-3}$; шаг $h=0{,}1$.

№ 1. $y''+\frac{y'}{x}+2y=x,$

$$\begin{cases} y(0{,}7)=0{,}5 \\ 2y(1)+3y'(1)=1{,}2. \end{cases}$$

№ 2. $y''-xy'+2y=x+1,$

$$\begin{cases} y(0{,}9)-0{,}5y'(0{,}9)=2, \\ y(1{,}2)=1. \end{cases}$$

№ 3. $y''+xy'+y=x+1$,

$$\begin{cases} y(0{,}5)+2y'(0{,}5)=1, \\ y'(0{,}8)=1{,}2. \end{cases}$$

№ 4. $y''+2y'-\dfrac{y}{x}=3$,

$$\begin{cases} y(0{,}2)=2, \\ 0{,}5y(0{,}5)-y(0{,}5)=1. \end{cases}$$

№ 5. $y''+2y'-xy=x^2$,

$$\begin{cases} y'(0{,}6)=0{,}7, \\ y(0{,}9)-0{,}5y'(0{,}9)=1. \end{cases}$$

№ 6. $y''-y'+\dfrac{2y}{x}=x+0{,}4$,

$$\begin{cases} y(1{,}1)-0{,}5y'(1{,}1)=2, \\ y'(1{,}4)=4. \end{cases}$$

№ 7. $y''-3y'+\dfrac{y}{x}=1$,

$$\begin{cases} y(0{,}4)=2, \\ y(0{,}7)+2y'(0{,}7)=0{,}7. \end{cases}$$

№ 8. $y''+3y'-\dfrac{y}{x}=x+1$,

$$\begin{cases} y'(1{,}2)=1, \\ 2y(1{,}5)-y'(1{,}5)=0{,}5. \end{cases}$$

№ 9. $y''-\dfrac{y'}{2}+3y=2x^2$,

$$\begin{cases} y(1)+2y'(1)=0{,}6, \\ y(1{,}3)=1. \end{cases}$$

№ 10. $y''+1{,}5y'-xy=0{,}5$,

$$\begin{cases} 2y(1{,}3)-y'(1{,}3)=1, \\ y(1{,}6)=3. \end{cases}$$

№ 11. $y''+2xy'-y=0{,}4$,

$$\begin{cases} 2y(0{,}3)+y'(0{,}3)=1, \\ y'(0{,}6)=2. \end{cases}$$

№ 12. $y''-0{,}5xy'+y=2$,

$$\begin{cases} y(0{,}4)=1{,}2, \\ y(0{,}7)+2y'(0{,}7)=1{,}4. \end{cases}$$

№ 13. $y''+\dfrac{2y'}{x}-3y=2$,

$$\begin{cases} y'(0{,}8)=1{,}5, \\ 2y(1{,}1)+y'(1{,}1)=3. \end{cases}$$

№ 14. $y''+2x^2y'+y=x$,

$$\begin{cases} 2y(0{,}5)-y'(0{,}5)=1, \\ y(0{,}8)=3. \end{cases}$$

№ 15. $y''-3xy'+2y=1{,}5$,

$$\begin{cases} y'(0{,}7)=1{,}3, \\ 0{,}5y(1)+y'(1)=2. \end{cases}$$

№ 16. $y''+2xy'-2y=0{,}6$,

$$\begin{cases} y'(2)=1, \\ 0{,}4y(2{,}3)-y'(2{,}3)=1. \end{cases}$$

№ 17. $y''+\dfrac{y'}{x}-0{,}4y=2x$,

$$\begin{cases} y(0{,}6)-0{,}3y'(0{,}6)=0{,}6, \\ y'(0{,}9)=1{,}7. \end{cases}$$

№ 18. $y''-\dfrac{y'}{2x}+0{,}8y=x$,

$$\begin{cases} y(1{,}7)+1{,}2y'(1{,}7)=2, \\ y'(2)=1. \end{cases}$$

№ 19. $y''-\dfrac{y'}{3}+xy=2$,

$$\begin{cases} y(0{,}8)=1{,}6, \\ 3y(1{,}1)-0{,}5y'(1{,}1)=1. \end{cases}$$

№ 20. $y''+0{,}8y'-xy=1{,}4$,

$$\begin{cases} y(1{,}8)=0{,}5, \\ 2y(2{,}1)+y'(21)=1{,}7. \end{cases}$$

№ 21. $y''+2y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x}$,

$$\begin{cases} 0{,}5y(0{,}9)+y'(0{,}9)=1, \\ y(1{,}2)=0{,}8. \end{cases}$$

№ 22. $y''-\dfrac{y'}{4}+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{x}{2}$,

$$\begin{cases} 1{,}5y(1{,}3)-y'(1{,}3)=0{,}6, \\ 2y(1{,}6)=0{,}3. \end{cases}$$

№ **23.** $y''-0{,}5y'+0{,}5xy=2x,$

$$\begin{cases} y'(1)=0{,}5 \\ 2y(1{,}3)-y'(1{,}3)=2. \end{cases}$$

№ **24.** $y''+2y'-1{,}5xy=\dfrac{2}{x},$

$$\begin{cases} y'(0{,}8)=1, \\ y(1{,}1)+2y'(1{,}1)=1. \end{cases}$$

№ **25.** $y''+2xy'-1{,}5=x,$

$$\begin{cases} 1{,}4y(1{,}1)+0{,}5y'(1{,}1)=2, \\ y'(1{,}4)=2{,}5. \end{cases}$$

№ **26.** $y''-\dfrac{xy'}{2}+0{,}5y=2x,$

$$\begin{cases} 0{,}4y(0{,}2)-y'(0{,}2)=1{,}5, \\ y'(0{,}5)=0{,}4. \end{cases}$$

№ **27.** $y''+0{,}6xy'-2y=1,$

$$\begin{cases} y(1{,}5)=0{,}6, \\ 2y(1{,}8)-0{,}8y'(1{,}8)=3. \end{cases}$$

№ **28.** $y''+\dfrac{y'}{2x}-y=\dfrac{2}{x},$

$$\begin{cases} y(0{,}6)=1{,}3, \\ 0{,}5y(0{,}9)-1{,}2y'(0{,}9)=1. \end{cases}$$

№ **29.** $y''-0{,}5x^2y'+2y=x^2,$

$$\begin{cases} y(1{,}6)+0{,}7y'(1{,}6)=2, \\ y(1{,}9)=0{,}8. \end{cases}$$

№ **30.** $y''-xy'+2xy=0{,}8,$

$$\begin{cases} y(1{,}2)-0{,}5y'(1{,}2)=1, \\ y'(1{,}5)=2. \end{cases}$$

Образец выполнения задания

$$y''+xy'-0{,}5\frac{y}{x}=1,$$

$$\begin{cases} y(2)+2y'(2)=1, \\ y(2{,}3)=2{,}15. \end{cases}$$

Разбив отрезок $[2;\,2{,}3]$ на части с шагом $h=0{,}1$ (рис. 7), получим четыре узловые точки с абсциссами $x_0=2$; $x_1=2{,}1$; $x_2=2{,}2$; $x_3=2{,}3$. Две точки $x_0=2$ и $x_3=2{,}3$ являются конечными, а две другие —

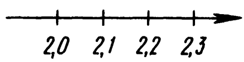


Рис. 7

внутренними. Данное уравнение во внутренних точках заменим конечно-разностным уравнением

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+x_i\cdot\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-0{,}5\cdot\frac{y_i}{x_i}=1 \quad (i=1,\,2).$$

Из краевых условий составим конечно-разностные уравнения в конечных точках:

$$\begin{cases} y_0+2\cdot\dfrac{-y_0+4y_1-3y_0}{2h}=1 \quad (i=0), \\ y_3=2{,}15 \quad (i=3). \end{cases}$$

Данная задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} y_0+\dfrac{-y_2+4y_1-3y_0}{0,1}=1, \\ \dfrac{y_2-2y_1+y_0}{0,01}+2,1\cdot\dfrac{y_2-y_0}{0,2}-0,5\cdot\dfrac{y_1}{2,1}=1, \\ \dfrac{y_3-2y_2+y_1}{0,01}+2,2\cdot\dfrac{y_3-y_1}{0,2}-0,5\cdot\dfrac{y_2}{2,2}=1, \\ y_3=2,15. \end{cases}$$

Выполнив преобразования, имеем

$$\begin{cases} -2,9y_0+4y_1-y_2=0,1, \\ 375,9y_0-841y_1+464,1y_2=4,2, \\ 391,6y_1-881y_2+488,4y=4,4, \\ \quad y_3=2,15. \end{cases}$$

Подставив значение y_3 в третье уравнение, получим для определения остальных неизвестных систему

$$\begin{cases} -2,9y_0+4y_1-y_2=0,1, \\ 375,9y_0-841y_1+464,1y_2=4,2, \\ 391,6y_1-881y_2=-1045,66. \end{cases}$$

Для решения полученной системы воспользуемся, например, схемой «главных элементов».

m_i	y_0	y_1	y_2	Свободные члены	$\sum$
−0,00113507 0,526788 −1	−2,9 375,9 0	4 −841 391,6	−1 464,1 $\boxed{-881}$	0,1 4,2 −1045,66	0,2 3,2 −1535,06
0,00560179 −1	−2,9 375,9	3,55551 $\boxed{-643,7098}$	— —	1,28690 −546,6411	1,94240 −805,4511
−1	−0,79429	—	—	−1,77527	−2,56957
	2,2350 3,2351	2,1849 3,1849	2,1580 3,1580		

Ответ:

x	y	x	y
2,0 2,1	2,235 2,185	2,2 2,3	2,158 2,150

Работа 7

Задание. Используя метод прогонки, составить решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с точностью $\varepsilon=10^{-3}$; шаг $h=0,05$. Воспользоваться вариантами работы 6.

Образец выполнения задания

$$y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1,$$

$$\begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1, \\ y(2{,}3) = 2{,}15. \end{cases}$$

В данной краевой задаче $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $A = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $B = 2{,}15$; узловые точки имеют абсциссы $x_i = 2 + 0{,}05i$; коэффициенты $p_i = x_i$, $q_i = -0{,}5/x_i$; $f_i = 1$ $(i = 0, 1, 2, \dots, 6)$.

Метод прогонки состоит из «прямого хода», в котором определяют коэффициенты

$$m_i = \frac{2h^2 q_i - 4}{2 + hp_i}, \quad n = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}, \quad F_i = \frac{2f_i}{2 + hp_i} \quad (i + 1, 2, \dots, n - 1),$$

а также

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}, \quad c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}},$$

$$d_i = F_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1).$$

После выполнения «прямого хода» переходят к выполнению «обратного хода», который состоит в определении значений искомой функции по формулам

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_i (c_{n-1} + 1)}, \quad y_i = c_i (d_i - y_{i+1}) \quad (i = n - 1, \ n - 2, \ \dots, \ 1, \ 0).$$

Здесь

$$m_i = -\frac{4 + \dfrac{0{,}0025}{x_i}}{2 + 0{,}05x_i}, \quad n_i = \frac{2 - 0{,}05x_i}{2 + 0{,}05x_i},$$

$$F_i = \frac{2}{2 + 0{,}05x_i} \quad (i = 1, \ 2, \ \dots, \ 5),$$

$$c_0 = \frac{2}{0{,}05 - 2} = -1{,}02564; \quad d_0 = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025.$$

Все вычисления будем располагать в таблице.

i	x_i	m_i	n_i	h^2F_i	c_i	d_i	y_i
0	2,00	—	—	—	−1,02564	0,025000	2,2490
1	2,05	−1,903077	0,902497	0,002378	−1,02308	0,095519	2,2178
2	2,10	−1,900803	0,900238	0,002375	−1,02063	0,025878	2,1933
3	2,15	−1,898535	0,897983	0,002372	−1,01830	0,026090	2,1748
4	2,20	−1,896273	0,895734	0,002370	−1,01611	0,026167	2,1618
5	2,25	−1,894017	0,893491	0,002367	−1,01406	0,026123	2,1537
6	2,30	—	—	—	—	—	2,15

Ответ:

x	y	x	y
2,00	2,249	2,20	2,162
2,05	2,218	2,25	2,154
2,10	2,193	2,30	2,150
2,15	2,175		

Глава X

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Работа 1

Задание. Используя метод сеток, составить приближенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в квадрате $ABCD$ с вершинами $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 1)$, $D(1;\ 0)$; шаг $h=0{,}2$. При решении задачи использовать итерационный процесс усреднения Либмана до получения ответа с точностью до 0,01.

В таблице вариантов приведены формулы, задающие искомую функцию на сторонах квадрата $ABCD$.

Номер варианта	$u\vert_{AB}$	$u\vert_{BC}$	$u\vert_{CD}$	$u\vert_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$20y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	$20x^2$
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
7	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
8	$50\sin\pi y$	$30\sqrt{x}$	$30y^2$	$50\sin\pi x$
9	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$

Номер варианта	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
10	$50y^2$	$50(1-x)$	0	$60x(1-x^2)$
11	$20y^2$	20	$20y$	$10x(1-x)$
12	$40\sqrt{y}$	$40(1-x)$	$20y(1-y)$	0
13	$20\cos\frac{\pi y}{2}$	$30x(1-x)$	$30y(1-y^2)$	$20(1-x^2)$
14	$30y^2(1-y)$	$50\sin\pi x$	0	$10x^2(1-x)$
15	$20y$	$20(1-x^2)$	$30\sqrt{y}(1-y)$	0
16	$30(1-y^2)$	$30x$	30	30
17	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	$30x^2$	$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$
18	0	$50\sin\pi x$	$50y(1-y^2)$	0
19	$20\sqrt{y}$	20	$20y^2$	$40x(1-x)$
20	$50y(1-y)$	$20x^2(1-x)$	0	$40x(1-x^2)$
21	$20\sin\pi y$	$30x$	$30y$	$20x(1-x)$
22	$40(1-y)$	$30\sqrt{x}$	$30y$	$40(1-x)$
23	$20\sin\pi y$	$50\sqrt{x}$	$50y^2$	$20\sin\pi x$
24	40	40	$40y^2$	$40\sin\frac{\pi}{2}(1-x)$
25	$30y^2$	$30(1-x)$	0	$40x^2(1-x)$
26	$25y^2$	25	$25y$	$20x(1-x)$
27	$15\sqrt{y}$	$15(1-x)$	$30y(1-y)$	0

Номер варианта	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
28	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	$20x(1-x)$	$25y(1-y^2)$	$30(1-x^2)$
29	$10y^2(1-y)$	$30\sin\pi x$	0	$15x(1-x^2)$
30	$25y$	$25(1-x^2)$	$30\sqrt{y}\,(1-y)$	0

Образец выполнения задания

$$u|_{AB}=45y(1-y),\quad u|_{BC}=25x;\quad u|_{CD}=25;\quad u|_{AD}=25x\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Процесс решения разобьем на несколько этапов.

I. Построим область решения, покроем ее сеткой с шагом $h=0{,}2$; вычислим значения искомой функции $u(x,\ y)$ в граничных точках области (рис. 8).

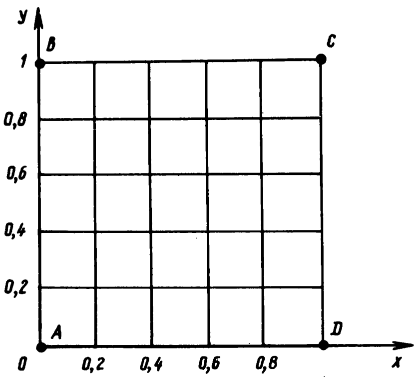


Рис. 8

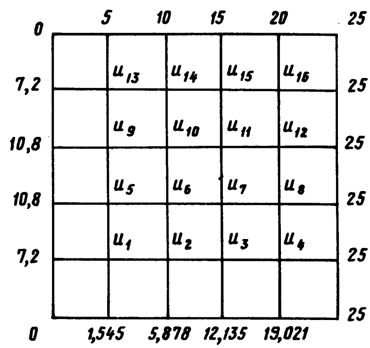


Рис. 9

1. Значения функции $u(x,\ y)$ на стороне AB найдем по формуле $u(x,\ y)=45y(1-y)$; имеем $u(0;\ 0)=0$; $u(0;\ 0{,}2)=7{,}2$; $u(0;\ 0{,}4)=10{,}8$; $u(0;\ 0{,}6)=10{,}8$; $u(0;\ 0{,}8)=7{,}2$; $u(0;\ 1)=0$.

2. На стороне BC: $u(x,\ y)=25x$; $u(0{,}2;\ 1)=5$; $u(0{,}4;\ 1)=10$; $u(0{,}6;\ 1)=15$; $u(0{,}8;\ 1)=20$; $u(1;\ 1)=25$.

3. На стороне CD: $u(x,\ y)=25$; $u(1;\ 0{,}8)=u(1;\ 0{,}6)=u(1;\ 0{,}4)=$ $=u(1;\ 0{,}2)=u(1;\ 0)=25$.

4. На стороне AD: $u(x,\ y)=25x\sin\frac{\pi x}{2}$; $u(0{,}2;\ 0)=1{,}545$; $u(0{,}4;\ 0)=5{,}878$; $u(0{,}6;\ 0)=12{,}135$; $u(0{,}8;\ 0)=19{,}021$.

II. Для определения значений функции во внутренних точках области методом сеток заданное уравнение Лапласа в каждой точке заменим конечно-разностным уравнением по формуле

$$u_{ij}=u(x_i,\ y_i)=\frac{1}{4}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}).$$

Используя эту формулу, составим уравнение для каждой внутренней точки. Предварительно пронумеруем искомые значения функции, изобразив их на рис. 9, соответствующем построенной выше сеточной области; на этом рисунке отметим также найденные граничные значения. В результате получаем систему уравнений

$$u_1=\frac{1}{4}(7{,}2+1{,}545+u_2+u_5);\quad u_2=\frac{1}{4}(5{,}878+u_1+u_3+u_6);$$

$$u_3=\frac{1}{4}(12{,}135+u_2+u_4+u_7);\quad u_4=\frac{1}{4}(19{,}021+25+u_3+u_8);$$

$$u_5=\frac{1}{4}(10{,}8+u_1+u_6+u_9);\quad u_6=\frac{1}{4}(u_2+u_5+u_7+u_{10});$$

$$u_7=\frac{1}{4}(u_3+u_6+u_8+u_{11});\quad u_8=\frac{1}{4}(25+u_4+u_7+u_{12});$$

$$u_9=\frac{1}{4}(10{,}8+u_5+u_{10}+u_{13});\quad u_{10}=\frac{1}{4}(u_6+u_9+u_{11}+u_{14});$$

$$u_{11}=\frac{1}{4}(u_7+u_{10}+u_{12}+u_{15});\quad u_{12}=\frac{1}{4}(25+u_8+u_{11}+u_{16});$$

$$u_{13}=\frac{1}{4}(7{,}2+5+u_9+u_{14});\quad u_{14}=\frac{1}{4}(10+u_{10}+u_{13}+u_{15});$$

$$u_{15}=\frac{1}{4}(15+u_{11}+u_{14}+u_{16});\quad u_{16}=\frac{1}{4}(20+25+u_{12}+u_{15}).$$

Решение этой системы выполним итерационным способом типа Зейделя. Для каждого значения составим последовательность $u_i^{(0)}$, $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$, ... $u_i^{(k)}$, ..., которую строим до сходимости в сотых долях. Запишем соотношения, с помощью которых будем находить элементы всех последовательностей:

$$u_1^{(k)}=\frac{1}{4}(8{,}745+u_2^{(k-1)}+u_5^{(k-1)});\quad u_2^{(k)}=\frac{1}{4}(5{,}878+u_1^{(k)}+u_3^{(k-1)}+u_6^{(k-1)});$$

$$u_3^{(k)}=\frac{1}{4}(12{,}135+u_2^{(k)}+u_4^{(k-1)}+u_7^{(k-1)});\quad u_4^{(k)}=\frac{1}{4}(44{,}021+u_3^{(k)}+u_8^{(k-1)});$$

$$u_5^{(k)}=\frac{1}{4}(10{,}8+u_1^{(k)}+u_6^{(k-1)}+u_9^{(k-1)});\quad u_6^{(k)}=\frac{1}{4}(u_2^{(k)}+u_5^{(k)}+u_7^{(k-1)}+u_{10}^{(k-1)});$$

$$u_7^{(k)}=\frac{1}{4}(u_3^{(k)}+u_6^{(k)}+u_8^{(k-1)}+u_{11}^{(k-1)});\quad u_8^{(k)}=\frac{1}{4}(25+u_4^{(k)}+u_7^{(k)}+u_{12}^{(k-1)});$$

$$u_9^{(k)}=\frac{1}{4}\left(10{,}8+u_5^{(k)}+u_{10}^{(k-1)}+u_{13}^{(k-1)}\right);\quad u_{10}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(u_6^{(k)}+u_9^{(k)}+u_{11}^{(k-1)}+u_{14}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{11}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(u_7^{(k)}+u_{10}^{(k)}+u_{12}^{(k-1)}+u_{15}^{(k-1)}\right);\quad u_{12}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(25+u_8^{(k)}+u_{11}^{(k)}+u_{16}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{13}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(12{,}2+u_9^{(k)}+u_{14}^{(k-1)}\right);\quad u_{14}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(10-u_{10}^{(k)}+u_{13}^{(k)}+u_{15}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{15}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(15-u_{11}^{(k)}+u_{14}^{(k)}+u_{16}^{(k-1)}\right);\quad u_{16}^{(k)}=\frac{1}{4}\left(45+u_{12}^{(k)}+u_{15}^{(k)}\right).$$

Для вычислений по этим формулам нужно определить начальные значения u_i^0, которые могут быть найдены каким-либо способом.

III. Чтобы получить начальное приближенное решение задачи, будем считать, что функция $u(x, y)$ по горизонталям области распределена равномерно.

Сначала рассмотрим горизонталь с граничными точками (0; 0,2) и (1; 0,2) (рис. 10). Обозначим искомые значения функции во внутренних

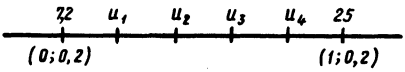


Рис. 10

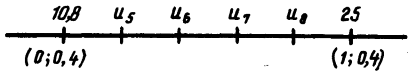


Рис. 11

точках через $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, $u_4^{(0)}$. Так как отрезок разбит на 5 частей, то шаг измерения функции $K_1=(25-7{,}2)/5=3{,}56$. Тогда получим

$$u_1^{(0)}=7{,}2+K_1=7{,}2+3{,}56=10{,}76;\quad u_2^{(0)}=u_1^{(0)}+K_1=10{,}76+3{,}56=14{,}32;$$

$$u_3^{(0)}=u_2^{(0)}+K_1=14{,}32+3{,}56=17{,}88;\quad u_4^{(0)}=u_3^{(0)}+K_1=17{,}88+3{,}56=21{,}44.$$

Аналогично найдем значения функции во внутренних точках других горизонталей. Для горизонтали с граничными точками (0; 0,4) и (1; 0,04) (рис. 11) имеем $K_2=(25-10{,}8)/5=2{,}84$ и, значит,

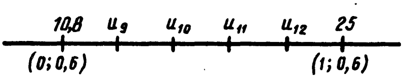


Рис. 12

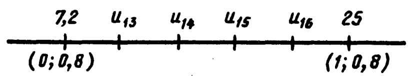


Рис. 13

$$u_5^{(0)}=10{,}8+2{,}84=13{,}64;\quad u_6^{(0)}=13{,}64+2{,}84=16{,}48;$$

$$u_7^{(0)}=16{,}48+2{,}84=19{,}32;\quad u_8^{(0)}=19{,}32+2{,}84=22{,}16.$$

Значения в граничных точках третьей горизонтали (рис. 12) такие же, как и для второй горизонтали; следовательно, $u_9^{(0)}=u_5^{(0)}=13{,}64$; $u_{10}^{(0)}=16{,}48$; $u_{11}^{(0)}=19{,}32$; $u_{12}^{(0)}=22{,}16$.

Наконец, значения в граничных точках четвертой горизонтали (рис. 13) те же, что и для первой горизонтали; поэтому $u_{13}^{(0)}=u_1^{(0)}=10{,}76$; $u_{14}^{(0)}=14{,}32$; $u_{15}^{(0)}=17{,}88$; $u_{16}^{(0)}=21{,}44$.

Все полученные значения представим в следующей таблице, которая называется *нулевым шаблоном*:

1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0,6	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,4	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,2	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0	0	1,545	5,878	12,135	19,021	25
y_j / x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

IV. Для каждого нового приближенного решения задачи будем составлять таблицу, содержащую только внутренние значения, которые изменяются в процессе вычислений. Эти таблицы называются *шаблонами*. В результате получим следующую последовательность шаблонов:

№ 1

9,790	13,258	17,027	20,904
12,641	15,363	18,411	21,589
12,524	15,170	18,241	21,506
9,176	12,354	16,312	20,623

№ 2

9,346	12,708	16,561	20,679
11,927	14,460	17,630	21,153
11,754	14,243	17,443	21,079
8,406	11,442	15,610	20,384

№ 3

9,092	12,371	16,287	20,544
11,461	13,829	17,100	20,887
11,239	13,518	16,856	20,771
7,985	10,929	15,189	20,074

№ 4

8,930	12,158	16,116	20,458
11,150	13,414	16,761	20,718
10,877	13,036	16,454	20,567
7,728	10,581	14,911	19,926

№ 5

8,826	12,021	16,005	20,403
10,945	13,144	16,542	20,608
10,634	12,712	16,189	20,433
7,551	10,344	14,715	19,826

№ 6

8,758	11,933	15,934	20,368
10,811	12,968	16,399	20,537
10,472	12,497	16,014	20,345
7,431	10,184	14,583	19,759

№ 7

8,714	11,875	15,887	20,344
10,723	12,853	16,306	20,490
10,365	12,365	15,899	20,288
7,350	10,077	14,496	19,716

№ 8

8,685	11,837	15,851	20,327
10,665	12,777	16,221	20,457
10,294	12,263	15,875	20,263
7,297	10,007	14,439	19,687

№ 9

8,666	11,811	15,835	20,319
10,628	12,725	16,203	20,439
10,248	12,215	15,778	20,228
7,262	9,960	14,414	19,675

№ 10

8,654	11,796	15,823	20,313
10,603	12,695	16,178	20,427
10,220	12,165	15,744	20,210
7,238	9,936	14,381	19,658

№ 11

8,646	11,786	15,815	20,308
10,587	12,674	16,162	20,418
10,198	12,137	15,722	20,199
7,225	9,912	14,362	19,648

№ 12

8,640	11,779	15,809	20,306
10,576	12,661	16,150	20,413
10,184	12,120	15,708	20,192
7,214	9,898	14,351	19,643

№ 13

8,637	11,774	15,806	20,304
10,569	12,652	16,143	20,409
10,176	12,108	15,699	20,188
7,207	9,889	14,344	19,639

№ 14

8,635	11,772	15,803	20,303
10,565	12,646	16,138	20,407
10,170	12,101	15,693	20,185
7,202	9,883	14,339	19,637

№ 15

8,634	11,770	15,802	20,302
10,562	12,642	16,135	20,405
10,167	12,096	15,689	20,183
7,200	9,879	14,336	19,636

Шаблоны № 14 и № 15 содержат значения, отличающиеся друг от друга меньше, чем на 0,01 (заданная точность); поэтому вычисления прекращаем. Последние значения округляем до сотых долей и получаем ответ:

1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	8,63	11,77	15,80	20,30	25
0,6	10,8	10,56	12,64	16,14	20,40	25
0,4	10,8	10,17	12,10	15,69	20,18	25
0,2	7,2	7,20	9,88	14,34	19,64	25
0	0	1,54	5,88	12,14	19,02	25
y_j / x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Работа 2

Задание. Используя метод сеток, составить решение дифференциального уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ с заданными начальными условиями; шаг $h=1$. Уточнение решения производить до сотых долей с помощью процесса Либмана.

№ 1. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=|x|+|y|$.

№ 2. $(|x|+2)\cdot(|y|+2)=12$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=2|x|+|y|$.

№ 3. $\left.\begin{array}{l}|y|=4-x^2\\ x\in[-2,\ 2]\end{array}\right\}$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=|x|\cdot|y|$.

№ 4. $x^2+y^2=16$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=|x|+2|y|$.

№ 5. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=|x|\cdot|y|$.

№ 6. $\left.\begin{array}{l}|x|=4-y^2\\ x\in[-4,\ 4]\end{array}\right\}$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=|x|+|y|$.

№ 7. $(|x|+2)(|y|+2)=12$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=|x|\cdot|y|$.

№ 8. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=2|x|+|y|$.

№ 9. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=|x|\cdot|y|$.

№ 10. $\left.\begin{array}{l}|y|=4-x^2\\ x\in[-2,\ 2]\end{array}\right\}$ (Г), $u(x, y)|_\Gamma=|x|+|y|$.

№ 11. $x^2+y^2=16$ (Г), $u(x, y)|_Г=0{,}5|x|+|y|$.

№ 12. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ (Г), $u(x, y)|_Г=|x|+0{,}5|y|$.

№ 13. $\left.\begin{array}{l}|x|=4-y^2\\ x\in[-4, 4]\end{array}\right\}$ (Г), $u(x, y)|_Г=|x|+\dfrac{y^2}{2}$.

№ 14. $(|x|+2)(|y|+2)=12$ (Г), $u(x, y)|_Г=2|x|+0{,}5|y|$.

№ 15. $x^2/25+y^2/9=1$ (Г), $u(x, y)|_Г=|x|+|y|$.

№ 16. $x^2/9+y^2/16=1$ (Г), $u(x, y)|_Г=2|x|+0{,}5|y|$.

№ 17. $\left.\begin{array}{l}|y|=9-x^2\\ x\in[-3, 3]\end{array}\right\}$ (Г), $u(x, y)|_Г=|x|+\dfrac{1}{2}|y|$.

№ 18. $x^2+y^2=16$ (Г), $u(x, y)|_Г=\dfrac{1}{2}|x|+2|y|$.

№ 19. $x^2/16+y^2/9=1$ (Г), $u(x, y)|_Г=0{,}5|x|+|y|$.

№ 20. $\left.\begin{array}{l}|x|=9-y^2\\ x\in[-9, 9]\end{array}\right\}$ (Г), $u(x, y)|_Г=0{,}5|x|+|y|$.

№ 21. $x^2/9+y^2/25=1$ (Г), $u(x, y)|_Г=0{,}5|x|+2|y|$.

№ 22. $x^2/25+y^2/16=1$ (Г), $u(x, y)|_Г=0{,}5|x|\cdot|y|$.

№ 23. $(|x|+3)\cdot(|y|+2)=18$ (Г), $u(x, y)|_Г=|x|+0{,}5|y|$.

№ 24. $\left.\begin{array}{l}|y|=9-x^2\\ x\in[-3, 3]\end{array}\right\}$ (Г), $u(x, y)|_Г=2|x|+0{,}5|y|$.

№ 25. $x^2+y^2=16$ (Г), $u(x, y)|_Г=0{,}5(|x|+|y|)$.

№ 26. $x^2/16+y^2/25=1$ (Г), $u(x, y)|_Г=\dfrac{1}{2}|x|+|y|$.

№ 27. $\left.\begin{array}{l}|x|=4-y^2\\ x\in[-4, 4]\end{array}\right\}$ (Г), $u(x, y)|_Г=|x|+0{,}5|y|$.

№ 28. $(|x|+2)\cdot(|y|+3)=18$ (Г), $u(x, y)|_Г=2|x|+0{,}5|y|$.

№ 29. $x^2/9+y^2/25=1$ (Г), $u(x, y)|_Г=|x|+0{,}5|y|$.

№ 30. $(|x|+5)\cdot(|y|+5)=45$ (Г), $u(x, y)|_Г=|x|+0{,}5|y|$.

Образец выполнения задания

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\ (Г);\quad u(x, y)|_Г=0{,}5(|x|+|y|).$$

1. Используя симметрию заданных начальных условий, построим решение только в I четверти (рис. 14). Возьмем шаг $h=1$ и составим таблицу значений x и y:

x	0	1	2	3	4
y	3	2,90	2,60	1,98	0

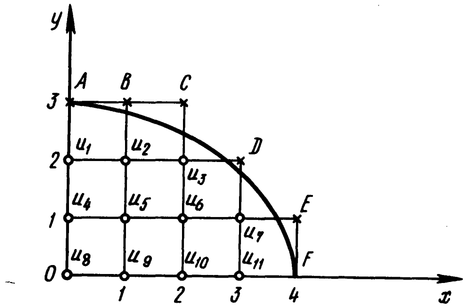


Рис. 14

На рисунке крестиками помечены граничные узлы, а кружочками — внутренние.

Вычислим значения функции $u(x, y)$ на границе:

$$
\begin{array}{ll}
A(0;\ 3); & u(A)=0{,}5(0+3)=1{,}5, \\
B(1;\ 2{,}90); & u(B)=0{,}5(1+2{,}9)=1{,}95, \\
C(2;\ 2{,}60); & u(C)=0{,}5(2+2{,}6)=2{,}3, \\
D(3;\ 1{,}98); & u(D)=0{,}5(3+1{,}98)=2{,}49, \\
E(3{,}77;\ 1); & u(E)=0{,}5(3{,}77+1)=2{,}39, \\
F(4;\ 0); & u(F)=0{,}5(4+0)=2.
\end{array}
$$

Для определения начальных значений функций $u(x, y)$ во внутренних точках составим систему уравнений, содержащих эти значения. Каждое уравнение получается приравниванием значения функции во внутренней точке среднему арифметическому четырех значений функции в соседних точках:

$$u_1=\frac{1}{4}(1{,}5+u_4+2u_2),\quad u_2=\frac{1}{4}(1{,}95+u_1+u_3+u_5),\quad u_3=\frac{1}{4}(4{,}79+u_2+u_6),$$

$$u_4=\frac{1}{4}(u_1+u_8+2u_5),\quad u_5=\frac{1}{4}(u_2+u_4+u_6+u_9),\quad u_6=\frac{1}{4}(u_3+u_5+u_7+u_{10}),$$

$$u_7=\frac{1}{4}(4{,}88+u_6+u_{11}),\quad u_8=\frac{1}{4}(4u_5),\quad u_9=\frac{1}{4}(u_8+u_{10}+2u_5),$$

$$u_{10}=\frac{1}{4}(u_9+u_{11}+2u_6),\quad u_{11}=\frac{1}{4}(4{,}78+2u_6).$$

Решая эту систему, получим $u_1=1{,}91$, $u_2=2{,}05$, $u_3=2{,}10$, $u_4=2{,}05$, $u_5=2$, $u_6=2{,}18$, $u_7=2{,}34$, $u_8=2{,}11$, $u_9=2{,}13$, $u_{10}=2{,}19$, $u_{11}=2{,}28$.

Найденные значения функции $u(x, y)$ позволяют составить шаблон № 1, в котором внутренние значения соответствуют найденным, а граничные получаются в результате уточнения предыдущих граничных значений по формуле линейной интерполяции

$$u(A_h)=u(A)+\delta\cdot\frac{u(B_h)-u(A)}{1+\delta},$$

где A_h — узловая граничная точка; A — ближайшая к A_h точка, лежащая на границе; B_h — ближайшая к A_h узловая точка, лежащая внутри области; δ — расстояние между точками A и A_h, взятое со знаком плюс, если точка A_h лежит внутри области, и со знаком минус, если она лежит вне области.

В данном примере имеем:

$$u(A_h)=u(A)=1{,}5;\quad \delta_B=2{,}90-3=-0{,}1;\quad u(B_h)=1{,}95-0{,}1\frac{2{,}05-1{,}95}{0{,}9}=1{,}94;$$

$$\delta_C=2{,}60-3=3-0{,}4;\quad u(C_h)=2{,}3-0{,}4\frac{2{,}1-2{,}3}{0{,}6}=2{,}43;$$

$$\delta_D=1{,}98-2=0{,}02;\quad u(D_h)=2{,}49-0{,}02\frac{2{,}34-2{,}49}{0{,}98}=2{,}49;$$

$$\delta_E=3{,}77-4=-0{,}23;\quad u(E_h)=2{,}39-0{,}23\frac{2{,}34-2{,}39}{0{,}77}=2{,}40;\quad u(F_h)=u(F)=2.$$

№ 1.

1,5	1,94	2,43		
1,91	2,05	2,10	2,49	
2,05	2,11	2,18	2,34	2,40
2,11	2,13	2,19	2,28	2

2. Процесс Либмана заключается в уточнении значений, входящих в шаблон № 1. Каждый следующий шаблон получается из предыдущего так: значения функции во внутренних точках равны среднему арифметическому четырех соседних значений предыдущего шаблона, а значения функции в граничных точках находятся по формуле линейной интерполяции, уже использованной при получении шаблона № 1. Это уточнение производится до тех пор, пока два последовательных шаблона не совпадут с заданной степенью точности. В результате вычислений получим следующую последовательность шаблонов:

№ 2.

1,5	1,94	2,31		
1,91	2,02	2,29	2,49	
2,06	2,10	2,18	2,34	2,40
2,09	2,13	2,19	2,22	2

№ 3.

1,5	1,94	2,33		
1,90	2,06	2,25	2,49	
2,05	2,10	2,23	2,32	2,41
2,10	2,12	2,18	2,22	2

№ 4.

1,5	1,94	2,31		
1,92	2,05	2,28	2,49	
2,05	2,12	2,21	2,34	2,40
2,09	2,12	2,20	2,20	2

№ 5.

1,5	1,94	2,33		
1,91	2,06	2,26	2,49	
2,06	2,11	2,23	2,33	2,41
2,09	2,14	2,19	2,22	2

№ 6.

1,5	1,94	2,31		
1,92	2,06	2,28	2,49	
2,062	2,12	2,22	2,34	2,40
2,10	2,13	2,20	2,21	2

№ 7.

1,5	1,94	2,32		
1,92	2,06	2,27	2,49	
2,06	2,12	2,23	2,33	2,41
2,10	2,20	2,22	2,22	2

№ 8.

1,5	1,94	2,32		
1,92	2,06	2,27	2,49	
2,06	2,12	2,23	2,33	2,41
2,10	2,13	2,20	2,22	2

Шаблон № 8 является ответом.

Работа 3

Задание. Используя метод сеток, составить решение смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (уравнения теплопроводности) при заданных начальных условиях $u(x, 0)=f(x)$, $u(0, t)=\varphi(t)$, $u(0{,}6, t)=\psi(t)$, где $x\in[0; 0{,}6]$. Решение выполнить при $h=0{,}1$ для $t\in[0; 0{,}01]$ с четырьмя десятичными знаками, считая $\sigma=1/6$.

№ 1. $u(x, 0)=\cos 2x$, $u(0, t)=1-6t$, $u(0{,}6; t)=0{,}3624$.
№ 2. $u(x, 0)=x(x+1)$, $u(0, t)=0$, $u(0{,}6; t)=2t+0{,}96$.
№ 3. $u(x, 0)=1{,}2+\lg(x+0{,}4)$, $u(0, t)=0{,}8+t$, $u(0{,}6; t)=1{,}2$.
№ 4. $u(x, 0)=\sin 2x$, $u(0, t)=2t$, $u(0{,}6; t)=0{,}932$.
№ 5. $u(x, 0)=3x(2-x)$, $u(0, t)=0$, $u(0{,}6; t)=t+2{,}52$.
№ 6. $u(x, 0)=1-\lg(x+0{,}4)$, $u(0, t)=1{,}4$, $u(0{,}6; t)=t+1$.
№ 7. $u(x, 0)=\sin(0{,}55x+0{,}03)$, $u(0, t)=t+0{,}03$, $u(0{,}6; t)=0{,}354$.
№ 8. $u(x, 0)=2x(1-x)+0{,}2$, $u(0, t)=0{,}2$, $u(0{,}6; t)=t+0{,}68$.
№ 9. $u(x, 0)=\sin x+0{,}08$, $u(0, t)=0{,}08+2t$, $u(0{,}6; t)=0{,}6446$.

№ 10. $u(x, 0)=\cos(2x+0{,}19)$, $u(0, t)=0{,}932$, $u(0{,}6; t)=0{,}1798$.
№ 11. $u(x, 0)=2x(x+0{,}2)+0{,}4$, $u(0, t)=2t+0{,}4$, $u(0{,}6; t)=1{,}36$.
№ 12. $u(x, 0)=\lg(x+0{,}26)+1$, $u(0, t)=0{,}415+t$, $u(0{,}6; t)=0{,}9345$.
№ 13. $u(x, 0)=\sin(x+0{,}45)$, $u(0, t)=0{,}435-2t$, $u(0{,}6; t)=0{,}8674$.
№ 14. $u(x, 0)=0{,}3+x(x+0{,}4)$, $u(0, t)=0{,}3$, $u(0{,}6; t)=6t+0{,}9$.
№ 15. $u(x, 0)=(x-0{,}2)(x+1)+0{,}2$; $u(0, t)=6t$; $u(0{,}6; t)=0{,}84$.
№ 16. $u(x, 0)=x(0{,}3+2x)$, $u(0, t)=0$, $u(0{,}6; t)=6t+0{,}9$.
№ 17. $u(x, 0)=\sin(x+0{,}48)$, $u(0, t)=0{,}4618$, $u(0{,}6; t)=3t+0{,}882$.
№ 18. $u(x, 0)=\sin(x+0{,}02)$, $u(0, t)=3t+0{,}02$, $u(0{,}6; t)=0{,}581$.
№ 19. $u(x, 0)=\cos(x+0{,}48)$, $u(0, t)=6t+0{,}887$, $u(0{,}6; t)=0{,}4713$.
№ 20. $u(x, 0)=\lg(2{,}63-x)$, $u(0, t)=3(0{,}14-t)$, $u(0{,}6; t)=0{,}3075$.
№ 21. $u(x, 0)=1{,}5-x(1-x)$, $u(0, t)=3(0{,}5-t)$, $u(0{,}6; t)=1{,}26$.
№ 22. $u(x, 0)=\cos(x+0{,}845)$, $u(0, t)=6(t+0{,}11)$, $u(0{,}6; t)=0{,}1205$.
№ 23. $u(x, 0)=\lg(2{,}42+x)$, $u(0, t)=0{,}3838$, $u(0{,}6; t)=6(0{,}08-t)$.
№ 24. $u(x, 0)=0{,}6+x(0{,}8-x)$, $u(0, t)=0{,}6$, $u(0{,}6; t)=3(0{,}24+t)$.
№ 25. $u(x, 0)=\cos(x+0{,}66)$, $u(0, t)=3t+0{,}79$, $u(0{,}6; t)=0{,}3058$.
№ 26. $u(x, 0)=\lg(1{,}43+2x)$, $u(0, t)=0{,}1553$, $u(0{,}6; t)=3(t+0{,}14)$.
№ 27. $u(x, 0)=0{,}9+2x(1-x)$, $u(0, t)=3(0{,}3-2t)$, $u(0{,}6; t)=1{,}38$.
№ 28. $u(x, 0)=\lg(1{,}95+x)$, $u(0, t)=0{,}29-6t$, $u(0{,}6; t)=0{,}4065$.
№ 29. $u(x, 0)=2\cos(x+0{,}55)$, $u(0, t)=1{,}705$, $u(0{,}6; t)=0{,}817+3t$.
№ 30. $u(x, 0)=x(1-x)+0{,}2$, $u(0, t)=0{,}2$, $u(0{,}6; t)=2(t+0{,}22)$.

Образец выполнения задания

$u(x, 0)=3x(1-x)+0{,}12$, $u(0, t)=2(t+0{,}06)$, $u(0{,}6; t)=0{,}84$.

Параболическое уравнение решается методом сеток постепенным переходом от значений функции $u(x_i, t_i)$ к значениям $u(x_i, t_{j+1})$; причем $t_{j+1}=t_j+k$, где $k=h^2/6=0{,}01/6=0{,}0017$.

Вычисления производятся по формуле

$$u_{i,j+1}=\frac{1}{6}(u_{i+1,j}+4u_{ij}+u_{i-1,j})\quad (i=1, 2, 3, 4, 5, 6;\ j=1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Все расчеты приведены в таблице:

j	i	0	1	2	3	4	5	6
	t_j \ x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0	0,12	0,39	0,60	0,75	0,84	0,87	0,84
1	0,0017	0,1233	0,3800	0,5900	0,7400	0,8300	0,8600	0,84
2	0,0033	0,1267	0,6372	0,5800	0,7300	0,8200	0,8517	0,84
3	0,0050	0,1300	0,3659	0,5704	0,7200	0,8103	0,8445	0,84
4	0,0067	0,1333	0,3607	0,5612	0,7101	0,8010	0,8380	0,84
5	0,0083	0,1367	0,3562	0,5526	0,7004	0,7920	0,8322	0,84
6	0,01	0,1400	0,3524	0,5445	0,6910	0,7834	0,8268	0,84

Работа 4

Задание. Используя метод сеток, составить решение смешанной задачи для уравнения колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальными условиями $u(x,\ 0)=f(x)$, $u_t(x,\ 0)=\Phi(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ и краевыми условиями $u(0,\ t)=\varphi(t)$, $u(1,\ t)=\psi(t)$. Решение выполнить с шагом $h=0{,}1$, определяя значения функции $u(x,\ t)$ с четырьмя десятичными знаками, причем $0\leqslant t\leqslant 0{,}5$.

№ 1. $f(x)=x(x+1)$,
$\Phi(x)=\cos x$,
$\varphi(t)=0$,
$\psi(t)=2(t+1)$.

№ 2. $f(x)=x\cos\pi x$,
$\Phi(x)=x(2-x)$,
$\varphi(t)=2i$,
$\psi(t)=-1$.

№ 3. $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$,
$\Phi(x)=x^2$,
$\varphi(t)=1+2t$,
$\psi(t)=0$.

№ 4. $f(x)=(x+0{,}5)(x-1)$,
$\Phi(x)=\sin(x+0{,}2)$,
$\varphi(t)=t-0{,}5$,
$\psi(t)=3t$.

№ 5. $f(x)=2x(x+1)+0{,}3$,
$\Phi(x)=2\sin x$,
$\varphi(t)=0{,}3$,
$\psi(t)=4{,}3+t$.

№ 6. $f(x)=(x+0{,}2)\sin\frac{\pi x}{2}$,
$\Phi(x)=1+x^2$,
$\varphi(t)=0$,
$\psi(t)=1{,}2(t+1)$.

№ 7. $f(x)=x\sin\pi x$,
$\Phi(x)=(x+1)^2$,
$\varphi(t)=2t$,
$\psi(t)=0$.

№ 8. $f(x)=3x(1-x)$,
$\Phi(x)=\cos(x+0{,}5)$,
$\varphi(t)=2t$,
$\psi(t)=0$.

№ 9. $f(x)=x(2x-0{,}5)$,
$\Phi(x)=\cos 2x$,
$\varphi(t)=t^2$,
$\psi(t)=1{,}5$.

№ 10. $f(x)=(x+1)\sin\pi x$,
$\Phi(x)=x^2+x$,
$\varphi(t)=0$,
$\psi(t)=0{,}5t$.

№ 11. $f(x)=(1-x)\cos\frac{\pi x}{2}$,
$\Phi(x)=2x+1$,
$\varphi(t)=2t+1$,
$\psi(t)=0$.

№ 12. $f(x)=0{,}5x(x+1)$,
$\Phi(x)=x\cos x$,
$\varphi(t)=2t^2$,
$\psi(t)=1$.

№ 13. $f(x)=0{,}5(x^2+1)$,
$\Phi(x)=x\sin 2x$,
$\varphi(t)=0{,}5+3t$,
$\psi(t)=1$.

№ 14. $f(x)=(x+1)\sin\frac{\pi x}{2}$,
$\Phi(x)=1-x^2$,
$\varphi(t)=0{,}5t$,
$\psi(t)=2$.

№ 15. $f(x)=x^2\cos\pi x$,
$\Phi(x)=x^2(x+1)$,
$\varphi(t)=0{,}5t$,
$\psi(t)=t-1$.

№ 16. $f(x)=(1-x^2)\cos\pi x$,
$\Phi(x)=2x+0{,}6$,
$\varphi(t)=1+0{,}4t$,
$\psi(t)=0$.

№ 17. $f(x)=(x+0{,}5)^2$,
$\Phi(x)=(x+1)\sin x$,
$\varphi(t)=0{,}5(0{,}5+t)$,
$\psi(t)=2{,}25$.

№ 18. $f(x)=1{,}2x-x^2$,
$\Phi(x)=(x+0{,}6)\sin x$,
$\varphi(t)=0$,
$\psi(t)=0{,}2+0{,}5t$.

№ 19. $f(x)=(x+0{,}5)(x+1)$,
$\Phi(x)=\cos(x+0{,}3)$,
$\varphi(t)=0{,}5$,
$\psi(t)=3-2t$.

№ 20. $f(x)=0{,}5(x+1)^2$,
$\Phi(x)=(x+0{,}5)\cos\pi x$,
$\varphi(t)=0{,}5$,
$\psi(t)=2-3t$.

№ 21. $f(x)=(x+0{,}4)\sin\pi x$,
$\Phi(x)=(x+1)^2$,
$\varphi(t)=0{,}5t$,
$\psi(t)=0$.

№ 22. $f(x)=(2-x)\sin\pi x$,
$\Phi(x)=(x+0{,}6)^2$,
$\varphi(t)=0{,}5t$,
$\psi(t)=0$.

№ 23. $f(x)=x\cos\dfrac{\pi x}{2}$,
$\Phi(x)=2x^2$,
$\varphi(t)=0$,
$\psi(t)=t^2$.

№ 24. $f(x)=(x+0{,}4)\cos\dfrac{\pi x}{2}$,
$\Phi(x)=0{,}3(x^2+1)$,
$\varphi(t)=0{,}4$,
$\psi(t)=1{,}2t$.

№ 25. $f(x)=(1-x^2)+x$,
$\Phi(x)=2\sin(x+0{,}4)$,
$\varphi(t)=1$,
$\psi(t)=(t+1)^2$.

№ 26. $f(x)=0{,}4(x+0{,}5)^2$,
$\Phi(x)=x\sin(x+0{,}6)$,
$\varphi(t)=0{,}1+0{,}5t$,
$\psi(t)=0{,}9$.

№ 27. $f(x)=(x^2+0{,}5)\cos\pi x$,
$\Phi(x)=(x+0{,}7)^2$,
$\varphi(t)=0{,}5$,
$\psi(t)=2t-1{,}5$.

№ 28. $f(x)=(x+2)(0{,}5x+1)$,
$\Phi(x)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,
$\varphi(t)=2$,
$\psi(t)=4{,}5-3t$.

№ 29. $f(x)=(x^2+1)(1-x)$,
$\Phi(x)=1-\sin x$,
$\varphi(t)=1$,
$\psi(t)=0{,}5t$.

№ 30. $f(x)=(x+0{,}2)\sin\dfrac{\pi x}{2}$,
$\Phi(x)=1+x^2$,
$\varphi(t)=0{,}6t$,
$\psi(t)=1{,}2$.

Образец выполнения задания

$f(x)=2x(1-x^2)$, $\Phi(x)=(x+0{,}4)\cos(x+0{,}3)$, $\varphi(t)=0{,}5t^2$, $\psi(t)=0$.

Для решения воспользуемся соотношением

$$u_{i,\,j+1}=u_{i+1,\,j}+u_{i-1,\,j}-u_{i,\,j-1},$$

где $i=1, 2, \ldots;\ j=1, 2, 3, \ldots$.

При этом $u_{i0}=f_i$, а для определения u_{i1} можно использовать один из возможных приемов, например,

$$u_{i1}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_{i-1})+h\Phi_i,$$

причем

$$x_i=0+ih\ \ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ \ n=\frac{1-0}{h}=10,$$

$$t_j=0+jh\ \ (j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Кроме того, $u_{0j}=\varphi(t_j)$; $u_{nj}=\psi(t_j)$.

Решения по указанным формулам удобно выполнять в таблице, которая и является решением данной задачи.

Порядок заполнения таблицы:

1. Вычисляем значения $u_{i0}=f(x_i)=2x_i(1-x_i^2)$ при $x_i=0{,}1i$ и записываем их в первую строку (она соответствует значению $t_0=0$).

2. Вычисляем значения $u_{0j}=\varphi(t_j)=0{,}5t_j^2$ при $t_j=0{,}1$ и записываем их в первый столбец таблицы (он соответствует значению $x_0=0$).

t_j \ x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0,198	0,384	0,546	0,672	0,750	0,768	0,714	0,576	0,342	0
0,1	0,005	0,2381	0,4247	0,5858	0,7092	0,7677	0,7942	0,7315	0,5825	0,3354	0
0,2	0,02	0,2317	0,4399	0,5879	0,6815	0,7534	0,7312	0,6627	0,4909	0,2405	0
0,3	0,045	0,2218	0,3949	0,5356	0,6321	0,6450	0,6219	0,4906	0,3207	0,1555	0
0,4	0,08	0,2082	0,3175	0,4391	0,4991	0,5006	0,4044	0,2799	0,1552	0,0802	0
0,5	0,125	0,1757	0,2524	0,2810	0,3076	0,2585	0,1586	0,6090	0,0394	−0,0003	0

3. Заносим значения $u_{10j}=\psi(t_j)=0$ в последний столбец таблицы (он соответствует значению $x_{10}=1{,}0$).

4. Вычисляем значения u_{i1} по формуле $u_{i1}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_{i-1})+h\Phi_i$, где f_{i+1} и f_{i-1} берутся из первой строки таблицы, а $\Phi_i=(x_i+0{,}4)\cos(x_i+0{,}3)$; $x_i=0{,}1i$ $(i=1, 2, \ldots, 9)$; $h=0{,}1$. Результаты записываем во вторую строку таблицы.

5. Вычисляем значения u_{ij} в последующих строках по формуле $u_{i,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-u_{i,j-1}$, где значения $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j-1}$ берутся из двух предыдущих строк таблицы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Элементарная теория погрешностей

1°. **Формулы точного подсчета погрешностей**

$$\delta(a \pm b) = \frac{a\delta_a + b\delta_b}{a \pm b}; \quad \alpha(a \pm b) = \alpha_a + \alpha_b;$$

$$\delta(ab) = \delta_a + \delta_b; \quad \alpha(ab) = ab(\delta_a + \delta_b) = b\alpha_a + a\alpha_b;$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta_a + \delta_b; \quad \alpha\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}(\delta_a + \delta_b) = \frac{b\alpha_a + a\alpha_b}{b^2};$$

$$\delta(a^m) = m\delta_a; \quad \alpha(a^m) = m \cdot a^{m-1}\alpha_a; \quad m \text{ — рациональное число.}$$

Здесь α — абсолютная погрешность приближенного числа; δ — относительная погрешность приближенного числа.

2°. **Таблица относительных погрешностей чисел, имеющих n верных знаков в узком смысле (в %)**

a_m \ n	1	2	3	4	5	6
1	50	5	0,5	0,05	0,005	0,0005
2	25	2,5	0,25	0,025	0,0025	0,00025
3	17	1,7	0,17	0,017	0,0017	0,00017
4	13	1,3	0,13	0,013	0,0013	0,00013
5	10	1,0	0,1	0,01	0,001	0,0001
6	8,4	0,84	0,084	0,0084	0,00084	0,000084
7	7,2	0,72	0,0072	0,0072	0,00072	0,000072
8	6,3	0,63	0,063	0,0063	0,00063	0,000063
9	5,6	0,56	0,056	0,0056	0,00056	0,000056

Здесь a_m — первая значащая цифра приближенного числа, считая слева направо.

Алгебра матриц

1°. **Определители.** *Определитель второго порядка*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

2°. **Нормы матрицы**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Первая норма $\|A\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Вторая норма $\|A\|_{II}=\max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$.

Третья норма $\|A\|_{III}=\sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$.

3°. *Обратная матрица* A^{-1} для данной квадратной неособенной матрицы A находится по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где Δ — определитель матрицы A; A_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

4°. **Формулы для обращения клеточной матрицы**

$$S=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right).$$

Обратная матрица ищется в виде клеточной матрицы

$$S^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array}\right).$$

а) Если легко определяется матрица A^{-1}, то $K=A^{-1}-A^{-1}BM$, $L=A^{-1}BM$, $M=-NCA^{-1}$, $N=(D-CA^{-1}B)^{-1}$.

б) Если легко определяется матрица D^{-1}, то $K=(A-BD^{-1}C)^{-1}$, $L=-KBD^{-1}$, $M=-D^{-1}CK$, $N=D^{-1}-D^{-1}CL$.

5°. **Обращение матриц методом окаймления**. Пусть

$$A_n=\begin{pmatrix} A_{n-1} & U_n \\ V_n & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где U_n — столбец, V_n — строка, a_{nn} — число. Обратная матрица A_n^{-1} ищется в виде

$$A_n^{-1}=\begin{pmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & 1/\alpha_n \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_n=a_{nn}-V_n A_n^{-1} U_n;\quad r_n=-\frac{A_{n-1}^{-1} U_n}{\alpha_n};\quad q_n=-\frac{V_n A_n^{-1}}{\alpha_n};$$

$$P_{n-1}=A_{n-1}^{-1}+\frac{A_{n-1}^{-1} U_n V_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n}.$$

Каждый этап обращения осуществляется по схеме

A_{n-1}^{-1}	U_n	$-A_{n-1}^{-1} U_n$
V_n	a_{nn}	
$-V_n A_{n-1}^{-1}$		α_n

6^0. **Обращение матрицы с помощью разбиения ее на произведение двух треугольных матриц.** Пусть

$$A = T_1 T_2, \text{ где } T_1 = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}; \; T_2 = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & 1 & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица ищется в виде $A^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}$.

7^0. **Исправление элементов приближенной обратной матрицы.** Пусть для матрицы A найдена приближенная обратная матрица D_0, причем $\|E - AD_0\| < 1$. Строят последовательность матриц $D_0, D_1, \dots, D_m$:

$$\begin{aligned} &D_0, && F_0 = E - AD_0, \\ &D_1 = D_0 + D_0 F_0, && F_1 = E - AD_1 = F_0^2, \\ &D_2 = D_1 + D_1, && F_2 = E - AD_2 = F_1^2, \\ &\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots \\ &D_m = D_{m-1} + D_{m-1} F_{m-1}, && F_m = E - AD_m = F_{m-1}^2. \end{aligned}$$

Вычисления продолжают до тех пор, пока с заданной степенью точности все элементы матриц D_{m-1} и D_m не совпадут.

Методы решения систем линейных уравнений

1^0. **Формулы Крамера**. Пусть дана система n уравнений с неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Если определитель системы отличен от нуля, то ее решения находятся по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ — определитель системы,}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

— дополнительные определители для $x_1, x_2, \dots, x_n$.

2^0. **Схема единственного деления (схема Гаусса) для решения системы уравнений** (на примере системы четырех уравнений)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{cases}$$

Решение производится с помощью таблицы:

Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Контрольные суммы $\sum$
x_1	x_2	x_3	x_4		
a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45}	c_1 c_2 c_3 c_4
1	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	β_1
	a'_{22} a'_{32} a'_{42}	a'_{23} a'_{33} a'_{43}	a'_{24} a'_{34} a'_{44}	a'_{25} a'_{35} a'_{45}	c'_2 c'_3 c'_4
	1	α_{23}	α_{24}	α_{25}	β_2
		a''_{33} a''_{43}	a''_{34} a''_{44}	a''_{35} a''_{45}	c''_3 c''_4
		1	α_{34}	α_{35}	β_3
			a'''_{44}	a'''_{45}	c'''_4
			1	α_{45}	β_4
			1	x_4	$\bar{x}_4$
		1		x_3	$\bar{x}_3$
	1			x_2	$\bar{x}_2$
1				x_1	$\bar{x}_1$

Вычислительные формулы	Контрольные соотношения
$c_i=\sum_{j=1}^{5} a_{ij}\ (i=1,2,3,4)$	
$\alpha_{1j}=a_{ij}/a_{11}\ (j=2,3,4,5);\ \beta_1=c_1/a_{11}$	$1+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}=\beta_1$
$a'_{ij}=a_{ij}-a_{i1}\alpha_{1j}\quad (i=2,3,4;\ j=2,3,4,5);$ $c'_i=c_i-a_{i1}\cdot\beta_1\quad (i=2,3,4)$	$a'_{i2}+a'_{i3}+a'_{i4}+a'_{i5}=c'_i$ $(i=2,3,4)$
$\alpha_{2j}=a'_{2j}/a'_{22}\ (j=3,4,5);\ \beta_2=c'_2/a'_{22}$	$1+\alpha_{23}+\alpha_{24}+\alpha_{25}=\beta_2$
$a''_{ij}=a'_{ij}-a'_{i2}\alpha_{2j}\quad (i=3,4;\ j=3,4,5);$ $c''_i=c'_i-a'_{i2}\beta_1\quad (i=3,4)$	$a''_{i3}+a''_{i4}+a''_{i5}=c''_i\ (i=3,4)$
$\alpha_{3j}=a''_{3j}/a''_{33}\ (j=4,5);\ \beta_3=c''_3/a''_{33}$	$1+\alpha_{34}+\alpha_{35}=\beta_3$

Вычислительные формулы	Контрольные соотношения
$a'''_{4j}=a''_{4j}-a''_{43}\alpha_{3j}$ $(j=4,\ 5)$; $c'''_4=c''_4-a''_{43}\beta$	$a'''_{44}+a'''_{45}=c'''_4$
$\alpha_{45}=a'''_{45}/a'''_{44}$; $\beta_4=c'''_4/a'''_{44}$	$1+\alpha_{45}=\beta_4$
$x_4=\alpha_{45}$ $x_3=\alpha_{35}-\alpha_{34}x_4$ $x_2=\alpha_{25}-\alpha_{24}x_4-\alpha_{23}\bar{x}_3$ $\bar{x}_2=\beta_2\alpha_{24}\bar{x}_4-\alpha_{23}\bar{x}_3$ $x_1=\alpha_{15}-\alpha_{14}x_4-\alpha_{13}x_3-\alpha_{12}x_2$ $\bar{x}_1=\beta_1-\alpha_{14}\bar{x}_4-\alpha_{13}\bar{x}_3-\alpha_{12}\bar{x}_2$ $\bar{x}_3=\beta_3-\alpha_{34}\bar{x}_4$ $\bar{x}_4=\beta_4$	$1+x_4=\bar{x}_4$ $1+x_3=\bar{x}_3$ $1+x_2=\bar{x}_2$ $1+x_1=\bar{x}_1$

3⁰. Схема Халецкого для решения системы уравнений

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Контрольные суммы $\sum$
a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45}	c_1 c_2 c_3 c_4
b_{11} 1	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	β_1
b_{21}	b_{22} 1	α_{23}	α_{24}	α_{25}	β_2
b_{31}	b_{32}	b_{33} 1	α_{34}	α_{35}	β_3
b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44} 1	α_{45}	β_4
			1	x_4	$\bar{x}_4$
		1		x_3	$\bar{x}_3$
	1			x_2	$\bar{x}_2$
1				x_1	$\bar{x}_1$

Вычислительные формулы	Контрольные соотношения
$c_i=\sum_{j=1}^{5} a_{ij}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$	
$b_{i1}=a_{i1}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$; $\alpha_{1j}=a_{1j}/a_{11}$ $(j=2,\ 3,\ 4,\ 5)$; $\beta_1=c_1/b_{11}$	$1+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}=\beta_1$

Продолжение

Вычислительные формулы	Контрольные соотношения
$b_{i2}=a_{i2}-b_{i1}\alpha_{12}\quad(i=2,\ 3,\ 4);$ $\alpha_{2j}=(a_{2j}-b_{21}\alpha_{1j})/b_{22}\quad(j=3,\ 4,\ 5);$ $\beta_2=\dfrac{c_2-b_{21}\beta_1}{b_{22}}$	$1+\alpha_{23}+\alpha_{24}+\alpha_{25}=\beta_2$
$b_{i3}=a_{i3}-b_{i1}\alpha_{13}-b_{i2}\alpha_{23}\quad(i=3,\ 4);$ $\alpha_{3j}=(a_{3j}-b_{31}\alpha_{1j}-b_{32}\alpha_{2j})/b_{33}\quad(j=4,\ 5);$ $\beta_3=(c_3-b_{31}\beta_1-b_{32}\beta_2)/b_{33}$	$1+\alpha_{34}+\alpha_{35}=\beta_3$
$b_{44}=a_{44}-b_{41}\alpha_{14}-b_{42}\alpha_{24}-b_{43}\alpha_{34}\quad(i=4);$ $\alpha_{45}=\dfrac{1}{b_{44}}(a_{45}-b_{41}\alpha_{15}-b_{42}\alpha_{25}-b_{43}\alpha_{35})\quad(j=5);$ $\beta_4=\dfrac{1}{b_{44}}(c_4-b_{41}\beta_1-b_{42}\beta_2-b_{43}\beta_3)$	$1+\alpha_{45}=\beta_4$

Значения неизвестных определяются по формулам единственного деления.

4⁰. **Обращение матрицы с помощью схемы Халецкого.** Пусть матрица A с помощью схемы Халецкого разложена на произведение двух треугольных матриц: $A=BC$. Обратная матрица ищется в виде $A^{-1}=D=[\alpha_{ij}]$:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}				
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}				
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}				
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}				
b_{11} 1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
b_{21}	b_{22} 1	c_{23}	c_{24}	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
b_{31}	b_{32}	b_{33} 1	c_{34}	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}
b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44} 1	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}

Элементы обратной матрицы α_{ij} вычисляются по формулам, вытекающим из соотношений:

	$i=$	1	2	3	4
$\alpha_{i1}b_{11}+\alpha_{i2}b_{21}+\alpha_{i3}b_{31}+\alpha_{i4}b_{41}$	=	1	0	0	0
$\alpha_{i2}b_{22}+\alpha_{i3}b_{32}+\alpha_{i4}b_{42}$	=	—	0	0	0
$\alpha_{i3}b_{33}+\alpha_{i4}b_{43}$	=	—	—	0	0
$\alpha_{i4}b_{44}$	=	—	—	—	0

	$j=$	1	2	3	4
$\alpha_{1j}+\alpha_{2j}c_{12}+\alpha_{3j}c_{13}+\alpha_{4j}c_{14}$	=	—	0	0	0
$\alpha_{2j}+\alpha_{3j}c_{23}+\alpha_{4j}c_{24}$	=	—	—	0	0
$\alpha_{3j}+\alpha_{4j}c_{34}$	=	—	—	—	0

Вычисления следует производить, начиная со значения $i=4$, затем $j=4$ и т. д.

5^0. Метод главных элементов для решения системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_{14}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=a_{24}, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=a_{34}. \end{cases}$$

На каждом этапе исключения неизвестного выбирают *главный элемент* — наибольший по модулю коэффициент при неизвестных, затем находят значения m_i, равные частному от деления элементов столбца, содержащих главный элемент, на главный элемент, взятый с противоположным знаком.

Для получения элементов следующего этапа прибавляют главную строку (строку, содержащую главный элемент) к остальным строкам, умножая ее на соответствующее значение m_i.

Один из возможных вариантов схемы главных элементов приводится ниже.

m_i	Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	Контрольные суммы Σ
	x_1	x_2	x_3		
m_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
-1	a_{21}	a_{22}	$\boxed{a_{23}}$	a_{24}	a_{25}
m_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
-1	$\boxed{a'_{11}}$	a'_{12}	—	a'_{14}	a'_{15}
m'_3	a'_{31}	a'_{32}	—	a'_{34}	a'_{35}
	—	$\boxed{a''_{32}}$	—	a''_{34}	a''_{35}
	x_1	x_2	x_3		
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$		

В приведенной схеме $|a_{23}|=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$, где $i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$; $|a'_{11}|=\max\limits_{i,j}|a'_{ij}|$, где $i=1, 3$, $j=1, 2$.

Вычисления выполняют по формулам:

$$m_1=-a_{13}/a_{23}, \quad m_3=-a_{33}/a_{23};$$

$$a'_{1j}=a_{1j}+m_1a_{2j} \quad (j=1, 2, 4, 5); \quad a'_{3j}=a_{3j}+m_3a_{2j} \quad (j=1, 2, 4, 5); \quad m'_3=-a'_{31}/a'_{11};$$

$$a''_{3j}=a'_{3j}+m'_3a'_{1j} \quad (j=2, 4, 5).$$

Неизвестные находят из соотношений:

$$\begin{aligned} x_2&=a''_{34}/a''_{32}; & \bar{x}_2&=a''_{35}/a''_{32}; \\ x_1&=(a'_{14}-a'_{12}x_2)/a'_{11}; & \bar{x}_1&=(a'_{15}-a'_{12}\bar{x}_2)/a'_{11}; \\ x_3&=(a_{24}-a_{21}x_1-a_{22}x_2)/a_{23}; & \bar{x}_3&=(a_{25}-a_{21}\bar{x}_1-a_{22}\bar{x}_2)/a_{23}. \end{aligned}$$

Контроль вычислений осуществляют так же, как и в схеме единственного деления.

6^0. Метод квадратных корней для решения системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=a_{15}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=a_{25}, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=a_{35}, \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=a_{45}, \end{cases}$$

коэффициенты которой симметричны относительно главной диагонали, т. е. $a_{ij}=a_{ji}$ $(i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3, 4)$.

Решение производят по схеме:

Коэффициенты при неизвестных				Свободные члены	Контрольные суммы Σ
x_1	x_2	x_3	x_4		
a_{11}	a_{12} a_{22}	a_{13} a_{23} a_{33}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45}	a_{16} a_{26} a_{36} a_{46}
t_{11}	t_{12} t_{22}	t_{13} t_{23} t_{33}	t_{14} t_{24} t_{34} t_{44}	$y_1=t_{15}$ $y_2=t_{25}$ $y_3=t_{35}$ $y_4=t_{45}$	t_{16} t_{26} t_{36} t_{46}
x_1	x_2	x_3	x_4		
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$		

Вычислительные формулы:

$$t_{11}=\sqrt{a_{11}};\quad t_{ij}=\frac{a_{1j}}{t_{11}};\quad t_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}\quad (j=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;\ i=2,\ 3,\ 4);$$

$$t_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}\cdot t_{kj}}{t_{ii}}\quad (i<j;\ i=2,\ 3,\ 4;\ j=3,\ 4,\ 5,\ 6);$$

$$\begin{aligned} &x_4=t_{45}/t_{44}; && \bar{x}_4=t_{46}/t_{44};\\ &x_3=(t_{35}-t_{34}\ x_4)/t_{33}; && \bar{x}_3=(t_{36}-t_{34}\bar{x}_4)/t_{33};\\ &x_2=(t_{25}-t_{24}x_4-t_{23}x_3)/t_{22}; && \bar{x}_2=(t_{26}-t_{24}\bar{x}_4-t_{23}\bar{x}_3)/t_{22};\\ &x_1=(t_{15}-t_{14}x_4-t_{13}x_3-t_{12}x_2)/t_{11}; && \bar{x}_1=(t_{16}-t_{14}\bar{x}_4-t_{13}\bar{x}_3-t_{12}\bar{x}_2)/t_{11} \end{aligned}$$

В схеме осуществляют строчный контроль, подобно тому, как это производят в схеме единственного деления.

7^0. **Метод последовательных приближений для решения системы уравнений (метод простой итерации).** Систему следует привести к виду $X=AX+F$. Строят последовательность векторов: X_0 — произвольный вектор; $X_1=AX_0+F$; $X_2=AX_1+F$; $X_3=AX_2+F$; ...; $X_n=AX_{n+1}+F$. Процесс сходится, если $\| A \| <1$ для какой-либо нормы матрицы.

Отдельные координаты вычисляют по формулам:

$$x_i^0=f_i,\quad x_i^{(k)}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}+f_i\quad (i=1,\ 2,\ ...,\ n).$$

Точность вычислений можно оценить из соотношения

$$\| X^*-X^{(k)} \| \leqslant \frac{\| A \|^k}{1-\| A \|}\cdot \| X_1-X_0 \|;$$

если $X_0=F$, то

$$\| X^*-X^{(k)} \| \leqslant \frac{\| A \|^{k+1}}{1-\| A \|}\cdot \| F \|,$$

где X^* — точное решение.

8. **Метод Зейделя для решения системы уравнений.** Систему следует привести к виду $X = AX + F$. Строят последовательность векторов $X_0, X_1, ..., X_k, ...$, где X_0 — произвольный вектор.

Координаты вектора X_k определяют по формуле

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + f_i \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Условия сходимости и точности вычислений можно определить так же, как и в методе простой итерации.

Методы решения нелинейных уравнений

1°. **Метод хорд.**

а) Если $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[a, b]$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)$$

(при этом $x_0 = a$).

б) Если $f(a) \cdot f''(x) > 0$ на $[a, b]$, то

$$x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a)$$

(при этом $x_0 = b$).

2°. **Метод Ньютона (метод касательных):**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

причем $x_0 = a$, если $f(a) \cdot f''(x) > 0$; $x_0 = b$, если $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[a, b]$.

Видоизмененная формула

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

3°. **Комбинированный метод хорд и касательных.** Пусть x_{n+1} и $\bar{x}_{n+1}$ — приближенные значения корня по недостатку и по избытку.

а) Если $f(a) \cdot f''(x) > 0$ на $[a, b]$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad \bar{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n)$$

(при этом $x_0 = a$, $\bar{x}_0 = b$).

б) Если $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[a, b]$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n); \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$$

(при этом $x_0 = a$, $\bar{x}_0 = b$).

4°. **Метод итераций.** Уравнение $f(x) = 0$ следует привести к виду $x = \varphi(x)$, например, по формуле

$$\varphi(x) = x - \frac{f'(x)}{k},$$

причем k следует выбрать так, чтобы $|k| > Q/2$, где $Q = \max\limits_{[a, b]} |f'(x)|$ и знак k совпадал бы со знаком $f'(x)$ на $[a, b]$. Итерационный процесс сходится при условии $|\varphi'(x)| < 1$ на $[a, b]$.

Уточнение корня производится по формуле

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

x_0 — значение, взятое из промежутка $[a,\ b]$.

Точность вычисления можно оценить из соотношения

$$|x^*-x_n|\leqslant\frac{M^n}{1-M}\cdot|x_1-x_0|,$$

где x^* — точное значение корня, а $M=\max\limits_{[a,\ b]}|\varphi'(x)|$.

5[0]. **Метод итераций для решения системы уравнений вида**

$$\begin{cases}x=\varphi(x,\ y),\\ y=\psi(x,\ y).\end{cases}$$

Пусть одно из решений системы принадлежит области D: $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$. Для уточнения решения используют формулы

$$\begin{cases}x_{n+1}=\varphi(x_n,\ y_n),\\ y_{n+1}=\psi(x_n,\ y_n),\end{cases}$$

где значения x_0 и y_0 принадлежат области D.

Процесс сходится, если в области D выполняются соотношения

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|<1,\quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|<1.$$

6[0]. **Метод Ньютона для решения системы уравнений**

$$\begin{cases}F(x,\ y)=0,\\ G(x,\ y)=0.\end{cases}$$

Значения x_0 и y_0 определяют графически. Для нахождения последующих приближений используют соотношения

$$\begin{cases}x_{n+1}=x_n+\dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta_n},\\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{\Delta_{y_n}}{\Delta_n},\end{cases}$$

где

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}F'_x(x_n,\ y_n) & F'_y(x_n,\ y_n)\\ G'_x(x_n,\ y_n) & G'_y(x_n,\ y_n)\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_n}=-\begin{vmatrix}F(x_n,\ y_n) & F'_y(x_n,\ y_n)\\ G(x_n,\ y_n) & G'_y(x_n,\ y_n)\end{vmatrix};\quad \Delta_{y_n}=\begin{vmatrix}F(x_n,\ y_n) & F'_x(x_n,\ y_n)\\ G(x_n,\ y_n) & G'_x(x_n,\ y_n)\end{vmatrix}.$$

7[0]. **Метод Лобачевского для решения уравнения**

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Предварительно выполняют процесс квадрирования корней. При квадрировании корней каждый коэффициент преобразованного уравнения равен квадрату прежнего коэффициента, минус удвоенное произведение соседних с ним коэффициентов в порядке близости к исходному коэффициенту и т. д., причем если нужный коэффициент отсутствует, то он считается равным нулю.

а) *Случай действительных различных корней.* Процесс квадрирования следует прекратить, если коэффициенты некоторого преобразованного уравнения в пределах точности вычислений равны квадратам соответствующих коэффициентов предыдущего преобразованного уравнения.

В результате получится уравнение $b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n=0$, корни которого находят по формуле

$$|x_k|=\sqrt[2^p]{\frac{b_k}{b_{k-1}}}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где p — число квадрирований.

Знаки корней определяют грубой прикидкой или на основании соотношений между корнями и коэффициентами.

б) *Случай пары комплексных корней.* Сначала находят действительные корни. Действительные части комплексных корней определяют из соотношений

$$u=-\frac{a_i}{2a_0}-\frac{1}{2}\sum_{k\neq m,\ k\neq m+1} x_k,$$

где x_k — найденные действительные корни. Квадрат модуля комплексных корней

$$r^2=\sqrt[2^p]{\frac{b_{m+1}}{b_{m-1}}},$$

где b_m — коэффициент с продолжающими оказывать влияние удвоенными коэффициентами. Коэффициент мнимой части $v=\sqrt{r^2-u^2}$. Тогда $x_{m,\,m+1}=u\pm iv$.

8^0. **Схема Горнера для деления многочлена**

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

на двучлен $x-p$:

	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
p		b_0p	b_1p	$\cdots$	$b_{n-2}p$	$b_{n-1}p$
	$b_0=a_0$	$b_1=a_1+b_0p$	$b_2=a_2+b_1p$	$\cdots$	$b_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-2}p$	$R=a_n+b_{n-1}p$

В результате получается соотношение

$$P_n(x)=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})(x-p)+R,$$

где $b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}$ — частное, а R — остаток.

9^0. **Схема Горнера для деления многочлена**

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

на квадратный трехчлен x^2+px+q:

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
$-p$		$-b_0p$	$-b_1p$	$-b_2p$	$\cdots$	$-b_{n-2}q$	—
$-q$		—	$-b_0q$	$-b_1q$	$\cdots$	$-b_{n-3}q$	$-b_{n-2}q$
	$b_0=a_0$	$b_1=a_1-b_0$	$b_2=a_2-$ $-b_1p-b_0q$	$b_3=a_3-$ $-b_2p-b_1q$	$\cdots$	$c_0=a_{n-1}-$ $-b_{n-2}p-$ $-b_{n-3}q$	$c_1=a_n-$ $-b_{n-2}q$

В результате получается соотношение

$$P_n(x)=(b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\ldots+b_{n-2})(x^2+px+q)+(c_0x+c_1),$$

где $b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\ldots+b_{n-2}$ — частное, а c_0x+c_1 — остаток.

10^0. **Метод Хичкока (метод выделения квадратного множителя) для решения уравнения**

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

Предварительно определяют грубое приближение квадратного множителя левой части уравнения $q_0(x)=x^2+p_0x+q_0$.

Для уточнения коэффициентов квадратного множителя $q_k^{(k)}=x^2+p_kx+q_k$ применяют двукратное деление левой части $p_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ на имеющийся множитель. Первое деление:

$$P_n(x)=(x^2+p_kx+q_k)L_k+xP(p_k, q_k)+Q(p_k, q_k).$$

Второе деление:

$$L_k(x)=(x^2+p_kx+q_k)L_k+xR(p_k, q_k)+S(q_k, p_k).$$

Тогда $p_{k+1}=p_k+\Delta_{pk}$, $q_{k+1}=q_k+\Delta_{qk}$, где

$$\Delta_{p_k}=\frac{\begin{vmatrix} P'_q(p_k, q_k) & P(p_k, q_k) \\ Q'_q(p_k, q_k) & Q(p_k, q_k)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P'_p(p_k, q_k) & P'_q(p_k, q_k) \\ Q'_p(p_k, q_k) & Q'_q(p_k, q_k)\end{vmatrix}}; \quad \Delta_{q_k}=\frac{\begin{vmatrix} P(p_k, q_k) & P'_p(p_k, q_k) \\ Q(p_k, q_k) & Q'_p(p_k, q_k)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P'_p(p_k, q_k) & P'_q(p_k, q_k) \\ Q'_p(p_k, q_k) & Q'_q(p_k, q_k)\end{vmatrix}};$$

$$P'_p(p_k, q_k)=p_kR(p_k, q_k)-S(p_k, q_k); \quad Q'_p(p_k, q_k)=q_kR(p_k, q_k);$$

$$P'_q(p_k, q_k)=-R(p_k, q_k); \quad Q'_p(p_k, q_k)=-S(p_k, q_k).$$

11^0. **Метод Горнера для уточнения корня уравнения**

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0.$$

а) Если корень имеет вид $x=C_0\cdot 10^m+C_1\cdot 10^{m-1}+\ldots$, то следует предварительно сделать подстановку $x=10^mz$ при $x>0$ или $x=-10^mz$ при $x<0$.

В результате получается уравнение, соответственный корень которого принадлежит отрезку $[0, 10]$.

б) Если искомый корень данного уравнения принадлежит отрезку $[0, 10]$, то для определения цифры C_0 пользуются непосредственным подсчетом значений $f(x)$ при $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 10$ по схеме Горнера. Затем производят две подстановки $y=x-C_0$ и $z=10y$, используя для первой из них схему Горнера. С помощью полученного уравнения определяют цифру C_1. Все последующие цифры корня определяют аналогично.

Нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы

1^0. **Метод Крылова.** Собственные числа матрицы A определяют путем решения характеристического уравнения, приведенного к виду

$$D(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n-q_1\lambda^{n-1}-q_2\lambda^{n-2}-\ldots-q_n)=0.$$

Значения $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$ являются решениями системы, полученной из векторного равенства

$$C_0q_n+C_1q_{n-1}+\ldots+C_{n-1}q_1=C_n,$$

где C_0 — начальный вектор (произвольный), $C_i=AC_{i-1}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$. Решая эту систему, например при помощи схемы Гаусса, находят $q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_n$.

Собственные векторы матрицы A определяют из соотношения

$$\bar{X}_i=\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{ij}C_{nj} \qquad (i=1, 2, ..., n),$$

где β_{ij} — коэффициенты частного, полученного при делении $(-1)^n D(\lambda)$ на $\lambda-\lambda_i$ (по схеме Горнера).

2^0. **Метод Данилевского.** Для определения коэффициентов характеристического уравнения матрицу A с помощью $n-1$ преобразований подобия заменяют подобной ей матрицей

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На первом этапе находят:

$$M_{n-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $m_{n-1,n-1}=\dfrac{1}{a_{n,n-1}}$, $m_{n-1,j}=-\dfrac{a_{nj}}{a_{n,n-1}}$;

$$B=AM_{n-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\begin{cases} b_{ij}=a_{ij}+a_{i,n-1}m_{n-1,j} & (1\leqslant i\leqslant n;\ j\neq n-1); \\ b_{i,n-1}=a_{i,n-1}m_{n-1,n-1} & (1\leqslant i\leqslant n); \end{cases}$

$$M_{n-1}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$C=M_{n-1}^{-1}B=M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}$ (матрица C подобна матрице A);

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & c_{n-2,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c_{ij}=b_{ij}$ $(i=1, 2, ..., n)$, $c_{n-1,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kj}$ $(j=1, ..., n)$.

Все эти вычисления одного этапа оформляют в следующей схеме (на примере матрицы четвертого порядка):

Номер строки	M^{-1}	Столбцы матрицы				Σ	Σ'
		1	2	3	4		
1		a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	d_1	
2		a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	d_2	
3		a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	d_3	
4		a_{41}	a_{42}	$\boxed{a_{43}}$	a_{44}	d_4	
1	M_3 \ M_3^{-1}	m_{31}	m_{32}	$m_{33}-1$	m_{34}	α_1	
5	a_{41}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	β_1	γ_1
6	a_{42}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	β_2	γ_2
$\boxed{7}$	a_{43}	b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}	β_3	γ_3
8	a_{44}	0	0	0	0	1	1
$\boxed{7'}$		c_{31}	$\boxed{c_{32}}$	c_{33}	c_{34}	β'_3	

В этой схеме столбцы Σ и Σ' вводят для выполнения построчного контроля производимых вычислений, причем

$$d_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij};\quad \alpha_1=-\frac{d_4}{a_{43}};\quad \gamma_i=d_i+a_{i3}\alpha_1\quad (i=1,\,2,\,3);\quad \beta_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}.$$

Контрольные соотношения:

$$\alpha_1=m_{31}+m_{32}+(-1)+m_{34},\quad \beta_i=\gamma_i+b_{i3}\quad (i=1,\,2,\,3),\quad \beta'_3=\sum_{j=1}^{n} c_{3j}.$$

В результате всех преобразований получается уравнение

$$(-1)^n D(\lambda)=\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-\ldots-p_n\lambda=0,$$

корнями которого являются собственные числа λ_i матрицы A.

Собственные векторы определяют из соотношения

$$\bar{X}_i=M_{n-1}M_{n-2}\ldots M_1 Y_i,\quad \text{где}\quad Y_i=\begin{pmatrix}\lambda_i^{n-1}\\ \lambda_i^{n-2}\\ \ldots\ldots\\ \lambda_i\\ 1\end{pmatrix}\quad (i=1,\,2,\,\ldots).$$

Каждое умножение в правой части этого равенства, начиная с M_1Y_i, позволяет определить одну из координат вектора $\bar{X}_i$.

3^0. **Метод Леверрье — Фаддеева.**

а) *Метод Леверрье для определения коэффициентов характеристического уравнения матрицы A.* Вычисляют степени матрицы A:

$$A^k=A^{k-1}\cdot A\qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Находят след для каждой из матриц A^k:

$$\operatorname{Sp} A^k=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\ldots+\lambda_n^k=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(k)};\quad A^k=\left[a_{ij}^{(k)}\right].$$

Коэффициенты характеристического уравнения определяют по формуле

$$kp_k = \operatorname{Sp} A^k - p_1 \operatorname{Sp} A^{k-1} - \ldots - p_{k-1} \operatorname{Sp} A.$$

В результате получается характеристическое уравнение матрицы A:

$$(-1)^n D(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n = 0.$$

б) *Видоизменение метода Леверрье, предложенное Фаддеевым.* Строят последовательность матриц:

$$\begin{array}{lll}
A_1 = A; & \operatorname{Sp} A_1 = p_1; & B_1 = A_1 - p_1 E; \\
A_2 = AB_1; & \dfrac{1}{2}\operatorname{Sp} A_2 = p_2; & B_2 = A_2 - p_2 E; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
A_{n-1} = AB_{n-2}; & \dfrac{1}{n-1}\operatorname{Sp} A_{n-1} = p_{n-1}; & B_{n-1} = A_{n-1} - p_{n-1} E; \\
A_n = AB_{n-1}; & \dfrac{1}{n}\operatorname{Sp} A_n = p_n; & B_n = A_n - p_n E.
\end{array}$$

В результате получается уравнение

$$\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n = 0.$$

При этом контролем служит соотношение $B_n = 0$. Кроме того, метод дает возможность найти $A^{-1} = B_{n-1}/p_n$.

Собственные векторы находят по формулам

$$\bar{X}_0 = \bar{e}; \quad \bar{X}_i^{(k)} = \lambda_k \bar{X}_{i-1}^{(k)} + b_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $\bar{e}$ — столбец единичной матрицы, b_i^k — одноименный столбец матрицы B_k. Собственный вектор $X_{n-1}^{(k)}$ соответствует λ_k.

4^0. **Метод итераций для определения первого и второго собственных чисел матрицы и их векторов.** Строят последовательность векторов: Y_0 — произвольный вектор, $Y_i = AY_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\lambda_1 \approx \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}},$$

где $y_i^{(k)}$ и $y_i^{(k+1)}$ — одноименные координаты двух последовательных векторов;

$$\lambda_2 \approx \frac{y_i^{(k+1)} - \lambda_1 y_i^{(k)}}{y_i^{(k)} - \lambda_1 y^{(k-1)}},$$

где $y_i^{(k+1)}$, $y_i^{(k)}$, $y_i^{(k-1)}$ — одноименные координаты трех последовательных векторов. При этом $\bar{X}_1 \approx \bar{Y}_k$, $\bar{X}_2 = \bar{Y}_{k+1} - \lambda_1 \bar{Y}_k$.

5^0. **Способы улучшения сходимости итерационного процесса.**

а) *Способ возведения матрицы в степень.* Строят последовательность матриц A, A^2, A^4, ..., A^{2^k}, затем находят $Y_m = A^m Y_0$; $Y_{m+1} = AY_m$, где $m = 2^k$. Тогда

$$\lambda_1 \approx \frac{Y_i^{(m+1)}}{Y_i^{(m)}}; \quad \bar{X}_1 \approx \bar{Y}_m \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

б) *Способ скалярных произведений.* Строят две последовательности векторов:

$$Y_0; \quad Y_1 = AY_0; \quad Y_2 = AY_1; \quad \ldots \quad Y_k = AY_{k-1}$$

и

$$Y_0; \quad Y'_1 = A'Y_0; \quad Y'_2 = A'Y'_1, \quad \ldots \quad Y'_k = A'Y'_{k-1},$$

где A и A' — соответственно данная и транспонированная матрицы. Тогда

$$\lambda_1 \approx \frac{(Y'_k \cdot Y_k)}{(Y'_{k-1} \cdot Y_k)};$$

если матрица A — симметрическая, то $A = A'$ и

$$\lambda_1 = \frac{(Y_k \cdot Y_k)}{(Y_{k-1} \cdot Y_k)}.$$

Интерполирование и экстраполирование функций

1°. **Интерполяционная формула Лагранжа:**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{x+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

При вычислении коэффициентов Лагранжа разности удобно расположить следующим образом:

$\boxed{x-x_0}$	x_0-x_1	x_0-x_2	......	x_0-x_n
x_1-x_0	$\boxed{x-x_1}$	x_1-x_2	......	x_1-x_n
x_2-x_0	x_2-x_1	$\boxed{x-x_2}$	......	x_2-x_n
......	......	......	......	......
x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	......	$\boxed{x-x_n}$

Если обозначить произведение элементов строк через D_i $(i=0, 1, \dots, n)$, а произведение элементов главной диагонали — через $\prod_{n+1}(x)$, то получится формула

$$P_n(x) = \prod\nolimits_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{D_i}.$$

В случае равноотстоящих узлов интерполяционная формула Лагранжа принимает вид

$$P_n(x) = \prod\nolimits_{n+1}(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(t-i)\,i!\,(n-i)!\,(-1)^{n-i}},$$

где $t = (x-x_0)/h$, $h = x_{i+1} - x_i$ $(i=0, 1, 2, \dots, n)$.

Для оценки погрешности интерполяционной формулы Лагранжа можно использовать соотношение

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}\,|\prod_{n+1}(x)|}{(n+1)!}, \quad \text{где} \quad M_{n+1} = \max_{[a,\, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

2°. **Интерполяционные формулы Ньютона.**

а) *Первая интерполяционная формула Ньютона*:

$$P_n(x) = y_0 + q\,\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $q = (x-x_0)/h$, $h = x_{i+1} - x_i$ $(i=0, 1, \dots, n)$, $\Delta^i y_0$ — конечная разность i-го порядка, причем $\Delta^i y_0 = \Delta^{i-1} y_1 - \Delta^{i-1} y_0$ $(i=1, 2, \dots, n)$.

Если $n=1$, то получается *формула линейной интерполяции*

$$P_1(x)=y_0+q\,\Delta y_0.$$

Если $n=2$, то получается *формула квадратичной интерполяции*

$$P_2(x)=y_0+q\,\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

б) *Вторая интерполяционная формула Ньютона*:

$$P_n(x)=y_n+q\,\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\ldots+\frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $q=(x-x_n)/h$.

в) *Интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих значений аргумента*:

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,\,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,\,x_1,\,x_2)+\ldots$$
$$\ldots+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0,\,x_1,\,\ldots,\,x_n),$$

где $f(x_0,\,x_1,\,\ldots,\,x_i)=\dfrac{f(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_i)-f(x_0,\,x_1,\,\ldots,\,x_{i-1})}{x_i-x_0}$ — разделенная разность i-го порядка.

3⁰. **Интерполяционная схема Эйткина:**

x_i	y_i	$P_{i-1,i}$	$P_{i-2,i-1,i}$	$P_{i-3,i-2,i-1,i}$	x_i-x
x_0	y_0	—	—	—	x_0-x
x_1	y_1	$P_{0,1}(x)$	—	—	x_1-x
x_2	y_2	$P_{1,2}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	—	x_2-x
x_3	y_3	$P_{2,3}(x)$	$P_{1,2,3}(x)$	$P_{1,2,3,0}(x)$	x_3-x
...	...	...	...	...	...

Здесь

$$P_{i,i+1,\ldots,i+k}(x)=\frac{1}{x_{i+k}-x_i}\begin{vmatrix} P_{i,\,i+k,\,\ldots,\,i+k-1}(x) & x_{i-k} \\ P_{i+1,\,i+2,\,\ldots,\,i+k}(x) & x_{i+k}-x\end{vmatrix},$$

причем

$$P_{i,\,i+1}(x)=\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i-x \\ y_{i+1} & x_{i+1}-x\end{vmatrix}.$$

Конец вычислений определяют путем сравнения последовательных значений $P(x)$.

4⁰. **Интерполяционные формулы Гаусса.**

Первая формула Гаусса:

$$P(x)=y_0+q\,\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+$$
$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+\ldots+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}+$$
$$+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n},$$

где $q=(x-x_0)/h$.

Вторая формула Гаусса:

$$P(x)=y_0+q\,\Delta y_{-1}+\frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$
$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\ldots+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n}+$$
$$+\frac{(q+n)(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n},$$

где $q=(x-x_0)/h$.

5^0. Интерполяционная формула Стирлинга:

$$P(x)=y_0+q\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1}+\frac{q(q^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+$$
$$+\frac{q^2(q^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+$$
$$+\frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3}+\ldots+\frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\ldots[q^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\times$$
$$\times\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n}+\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2}+\frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)\ldots[q^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n},$$

где $q=(x-x_0)/h$. Обычно эту формулу используют при $|q|\leqslant 0{,}25$.

6^0. Интерполяционная формула Бесселя:

$$P(x)=\frac{y_0+y_{-1}}{2}+\left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+$$
$$+\frac{(q-0{,}5)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}+$$
$$+\frac{(q-0{,}5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q+3)}{6!}\times$$
$$\times\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\ldots+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!}\times$$
$$\times\frac{\Delta^{2n}y_{-n}+\Delta^{2n}y_{-n+1}}{2}+$$
$$+\frac{(q-0{,}5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}y_{-n},$$

где $q=(x-x_0)/h$. Обычно эту формулу используют при $0{,}25\leqslant q\leqslant 0{,}75$.

Численное дифференцирование и интегрирование

1^0. **Формулы численного дифференцирования**

а) *основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона*:

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+\frac{2q^3-9q^2+11q^{-3}}{12}\Delta^4 y_0+\right.$$
$$\left.+\frac{5q^4-40q^3+105q^2-100q+24}{120}\Delta^5 y_0+\ldots\right),$$

$$y''(x)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0+\right.$$
$$\left.+\frac{2q^3-12q^2+21q-10}{12}\Delta^5 y_0\ldots\right),$$

где $q=(x-x_0)/h$, $h=x_{i+1}-x_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$;

б) *основанные на первой формуле Гаусса*:

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{3q^2-1}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\frac{2q^3-3q^2-q+1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\ldots\right),$$
$$y''(x)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}+q\Delta^3 y_{-1}+\frac{6q^2-6q+1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\ldots\right);$$

в) *основанные на второй формуле Гаусса*:

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_{-1}+\frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_{-1}+\frac{3q^2-1}{6}\Delta^3 y_{-2}+\frac{2q^3+3q^2-q-1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\ldots\right),$$
$$y''(x)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}+q\Delta^3 y_{-2}+\frac{6q^2-6q-1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\ldots\right);$$

г) *основанные на формуле Стирлинга*:

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}+q\,\Delta^2 y_{-1}+\frac{3q^2-1}{6}\,\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}+\frac{2q^3-q}{12}\Delta^4 y_{-2}+\ldots\right),$$
$$y''(x)\approx\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}+q\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{6q^2-1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\ldots\right);$$

д) *основанные на формуле Бесселя*:

$$y'(x)\approx\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{3q^2-3q+\frac{1}{2}}{6}\Delta^3 y_{-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{2q^3-3q^2-q+1}{12}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}+\ldots\right),$$
$$y''(x)\approx\frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2}+\frac{2q-1}{2}\Delta^3 y_{-1}+\frac{6q^2-6q-1}{12}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2}+\ldots\right).$$

2^0. **Формулы численного интегрирования.**

а) Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ разбит на n частей с шагом $h=(b-a)/n$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\quad(\textit{формула левых прямоугольников});$$
$$\int_a^b f(x)\,dx\approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\quad(\textit{формула правых прямоугольников});$$
$$\int_a^b f(x)\,dx\approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\quad(\textit{формула средних прямоугольников}),$$

где $x_i=a+ih$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Остаточные члены этих формул соответственно равны

$$R_n(f)=\frac{(b-a)^2}{2n}f'(\varepsilon),$$

$$R_n(f)=-\frac{(b-a)^2}{2n}f'(\varepsilon),$$

$$R_n(f)=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\varepsilon),$$

где $a\leqslant\varepsilon\leqslant b$.

б) *Формула Ньютона—Котеса*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_{kn}f(x_k),$$

где $x_i=x_0+ih$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, $x_0=a$, $h=(b-a)/n$.

Коэффициенты $C_k=H_{kn}/N_n$ определяют заранее и для них составлены таблицы:

n	H_{0n}	H_{1n}	H_{2n}	H_{3n}	H_{4n}	H_{5n}	H_{6n}	N_n
1	1	1						2
2	1	4	1					6
3	1	3	3	1				8
4	7	32	12	32	7			90
5	19	75	50	50	75	19		288
6	41	216	27	272	27	216	41	840

в) *Формула трапеций*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right),$$

где $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, причем

$$R_n(f)=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\varepsilon),\quad a\leqslant\varepsilon\leqslant b.$$

г) *Формула Симпсона* (число n — обязательно четное):

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}\left[y_0+y_n+2(y_2+y_n+y_6+\ldots+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})\right],$$

причем

$$R_n(f)=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{\mathrm{IV}}(\varepsilon),\quad a\leqslant\varepsilon\leqslant b.$$

д) *Формула Гаусса*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2}\left[C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\ldots+C_nf(x_n)\right],$$

где $x_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Значения t_i и C_i берутся из таблицы:

n	t_i	C_i
1	$t_1=0$	$C_1=2$
2	$t_{1,2}=\pm 0{,}577350$	$C_1=C_2=1$
3	$t_{1,3}=\pm 0{,}774597$ $t_2=0$	$C_1=C_3=\frac{5}{9}=0{,}555556$ $C_2=\frac{8}{9}=0{,}888889$
4	$t_{1,4}=\pm 0{,}861136$ $t_{2,3}=\pm 0{,}339981$	$C_1=C_4=0{,}347855$ $C_2=C_3=0{,}652145$

е) *Экстраполяция по Ричардсону*. Пусть I_{n_1} и I_{n_2} — два приближенных значения $\int_a^b f(x)\,dx$, найденных по одной и той же формуле при n_1 и n_2 $(n_2>n_1)$. Тогда более точное значение этого интеграла можно найти по формуле

$$I_{n_1,n_2}=I_{n_2}+\frac{n_1^m}{n_2^m-n_1^m}\left(I_{n_2}-I_{n_1}\right),$$

где m — порядок остаточного члена выбранной формулы (например, для формулы трапеций $m=2$, для формулы Симпсона $m=4$).

Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Решение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

заключается в отыскании функции $y(x)$, удовлетворяющей этому уравнению и начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Для решения поставленной задачи применяются следующие методы.

а) *Метод степенных рядов*. Решение ищут в виде суммы ряда

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots.$$

Приближенное решение задачи дает частичная сумма этого ряда.

б) *Метод Эйлера для уравнения $y'=f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$.* Составляют таблицу значений $y_k=y(x_k)$, где $x_k=x_0+kh$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, $h=(b-a)/n$, $[a, b]$ — отрезок, на котором ищется решение. Значения y_{k+1} определяются по формуле

$$y_{k+1}=y_k+hf\left(x_k, y_k\right)\quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Погрешность вычислений на каждом шаге составляет $R_k=0{,}5h^2y''(\varepsilon)$, где $x_k\leqslant\varepsilon\leqslant x_{k+1}$.

в) *Усовершенствованный метод ломаных*. Сначала вычисляют промежуточные значения

$$x_{k+1/2}=x_k+\frac{h}{2};\quad y_{k+1/2}=y_k+\frac{h}{2}f(x_k,\ y_k),$$

а затем находят $y_{k+1}=y_k+hf(x_{k+1/2},\ y_{k+1/2})$. Метод имеет несколько большую точность, чем метод Эйлера.

г) *Усовершенствованный метод Эйлера — Коши.* Сначала вычисляют «грубое» значение

$$y_{k+1}^{(0)}=y_k+hf(x_k,\ y_k),$$

которое затем уточняют по формуле

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{2}h\left[f(x_k,\ y_k)+f(x_{k+1},\ y_{k+1})\right].$$

Погрешность метода на каждом шаге имеет порядок h^3.

д) *Усовершенствованный метод Эйлера с уточнением.* Сначала вычисляют

$$y_{k+1}^{(0)}=y_k+hf(x_k,\ y_k),$$

а затем это значение уточняют по формуле

$$y_{k+1}^{(i)}=y_k+\frac{h}{2}\left[f(x_k,\ y_k)+f\left(x_{k+1},\ y_{k+1}^{(i-1)}\right)\right]\quad (i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Итерации продолжают до тех пор, пока в пределах требуемой точности два последовательных приближения не совпадут. Погрешность метода на каждом этапе имеет порядок h^3.

е) *Метод Рунге — Кутта.* На каждом шаге вычисления выполняют по формуле

$$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}\left(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}\right),$$

где

$$k_1^{(i)}=hf(x_i,\ y_i),\quad k_2^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_2^{(i)}}{2}\right),\quad k_4^{(i)}=hf\left(x_i+h,\ y_i+k_3^{(i)}\right),$$

причем $x_i=x_0+ih$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Погрешность метода на каждом шаге имеет порядок h^5.

ж) *Метод Адамса.* Формула с первыми разностями:

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1},\quad q_k=hf(x_k,\ y_k)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Значение y_1 находят другим способом. Погрешность на каждом шаге имеет порядок h^2.

Формула со вторыми разностями:

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}\quad (k=2,\ 3,\ \ldots).$$

Значения y_1 и y_2 находят другим способом. Погрешность на каждом шаге имеет порядок h^3.

з) *Метод Милна.* Пусть для уравнения $y'=f(x, y)$, кроме начального условия $y(x_0)=y_0$, найден «начальный отрезок», т. е. значения искомой функции $y(x_i)=y_i$ в точках $x_i=x_0+ih$ $(i=1, 2, 3)$.

Последующие значения y_i при $i=4, 5, \ldots$ определяют на каждом шаге следующим образом. Для предсказания используют *первую формулу Милна*

$$y_i^{\text{пред}}=y_{i-4}+\frac{4h}{3}(2f_{i-3}-f_{i-2}+2f_{i-1}).$$

Используя $y_i^{\text{пред}}$, находят $f_i^{\text{пред}}=f(x_i, y_i^{\text{пред}})$ и производят уточнения (коррекцию) значения y_i по *второй формуле Милна*

$$y_i^{\text{кор}}=y_{i-2}+\frac{h}{3}(f_{i-2}+4f_{i-1}+f_i^{\text{пред}}).$$

Абсолютная погрешность ε_i значения $y_i^{\text{кор}}$ приближенно определяется по формуле

$$\varepsilon_i\approx\frac{1}{29}|y_i^{\text{кор}}-y_i^{\text{пред}}|.$$

Если точность результата достаточна, то полагают $y_i\approx y_i^{\text{кор}}$.

2^0. **Решение краевой задачи для уравнения** $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ состоит в определении значений функции $y(x)$, удовлетворяющей данному уравнению и краевым условиям

$$\begin{cases}\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=A,\\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B,\end{cases}$$

где $|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0$, $|\beta_0|+|\beta_1|\neq 0$.

Разбив отрезок $[a, b]$ на n равных частей с шагом $h=(b-a)/n$, получают точки $x_i=a+ih$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, в которых требуется найти искомые значения $y_i=y(x_i)$.

а) *Метод конечных разностей.* Производные заменяют конечно-разностными отношениями; тогда для внутренних точек, т. е. при $i=1, 2, \ldots, n-1$, выполняются равенства

$$y_i'=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h},\quad y_i''=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2},$$

а для краевых точек $x_0=a$ и $x_n=b$ — равенства

$$y_0'=\frac{y_1-y_0}{h},\quad y_n'=\frac{y_n-y_{n-1}}{h},$$

или

$$y_0'=\frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h};\quad y_n'=\frac{3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{2h}.$$

В результате получается система уравнений с неизвестными $y_0, y_1, \dots, y_n$. Решив эту систему, получают таблицу приближенных значений искомой функции.

б) *Метод прогонки.* Предварительно определяют коэффициенты уравнений вида

$$y_{i+1}+m_i y_i+k_i y_{i-1}=h^2F_i \quad (1, 2, \dots, n-1),$$

где

$$m_i=\frac{h^2q_i-2}{1+\frac{h}{2}p_i};\quad k_i=\frac{1-\frac{h}{2}p_i}{1+\frac{h}{2}p_i};\quad F_i=\frac{f_i}{1+\frac{h}{2}p_i}.$$

Затем находят элементы «прямого хода»:

$$C_0=\frac{\alpha_1}{h\alpha_0-\alpha_1};\quad d_0=\frac{Ah}{\alpha_1};\quad c_i=\frac{1}{m_i-kc_{i-1}};\quad d_i=h^2F_i-k_ic_{i-1}d_{i-1}\quad (i=1, 2, \dots, n-1).$$

Наконец, выполняется «обратный ход»; находят

$$y_n=\frac{Bh+\beta_1c_{n-1}d_{n-1}}{\beta_0h+\beta_1(c_{n-1}+1)};\quad y_i=c_i(d_i-y_{i+1})\quad (i=n-1, \dots, 1, 0).$$

Вычисления удобно выполнять в следующей таблице:

x_i	m_i	k_i	h^2F_i	c_i	d_i	y_i
x_0	—	—	—	c_0	d_0	y_0
x_1	m_1	k_1	h^2F_1	c_1	d_1	y_1
x_2	m_2	k_2	h^2F_2	c_2	d_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}	m_{n-1}	k_{n-1}	h^2F_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	y_{n-1}
x_n	—	—	—	—	—	y_n

Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

1°. Уравнение Лапласа $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$

I схема для замены уравнения Лапласа конечно-разностным уравнением:

$$u(x, y)=\frac{1}{4}[u(x-h, y)+u(x+h, y)+u(x, y-h)+u(x, y+h)].$$

II схема для замены уравнения Лапласа конечно-разностным уравнением:

$$u(x, y)=\frac{1}{4}[u(x-h, y-h)+u(x-h, y+h)+u(x+h, y-h)+u(x+h, y+h)].$$

а) *Задача Дирихле для уравнения Лапласа* заключается в нахождении функции $u=u(x, y)$, удовлетворяющей данному уравнению внутри некоторой области G, а на границе этой области Γ — условию $u_\Gamma=\varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — заданная непрерывная функция.

Метод сеток состоит в том, что выбирают шаг h и строят сетку $x_i=x_0+ih$, $y_i=y_0+jh$ $(i=0, 1, 2, ...;\ j=0, 1, 2, ...)$, покрывающую данную область G.

Выделив граничные и внутренние узлы, заменяют данное уравнение во внутренних точках конечно-разностным уравнением, используя I или II схему, а в граничных точках значения функции $u(x, y)$ находят из дополнительного условия. Решив полученную систему, составляют таблицу значений искомой функции.

б) *Процесс усреднения Либмана* применяется при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа. При этом используют формулы:

для внутренних точек

$$u_{ij}^{(k)}=\frac{1}{4}\left[u_{i-1,j}^{(k-1)}+u_{i+1,j}^{(k-1)}+u_{i,j-1}^{(k-1)}+u_{i,j+1}^{(k-1)}\right] \quad (k=1, 2, ...),$$

где u_{ij} — начальные значения внутренних точек, найденные из решения системы или взятые произвольно;

для граничных точек

$$u^0(A_h)=u(A)=\varphi(A),$$

где $u^0(A_h)$ — начальное значение функции в точке A_h, $u(A)$ — значение функции в точке A, лежащей на границе;

$$u^{(k)}(A_h)=u(A)+\frac{u^{(k-1)}(B)-u(A)}{h+\delta}\delta,$$

где δ — расстояние между точками A и A_h, взятое со знаком плюс, если A_h — внутренняя точка области G, и со знаком минус, если A_h — внешняя точка.

2^0. **Смешанная задача для уравнения теплопроводности** $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ состоит в определении функции $u(x, t)$, удовлетворяющей данному уравнению, начальному условию $u(x, 0)=f(x)$ $0\leqslant x\leqslant l$ и краевым условиям $u(0, t)=\varphi(t)$, $u(l, t)=\psi(t)$.

Используя метод сеток, выбирают шаг h по оси Ox и вычисляют шаг $k=\sigma h^2$ по оси Ot, а затем строят сетку со значениями $x_i=in$, $t_j=jk$ $(i=0, 1, 2, ..., n;$ $j=0, 1, 2, ..., k)$.

Значения $u_{ij}=u(x_{ij}, t_j)$ вычисляют по формулам:

$u_{i0}=u(x_i, 0)=f(x_i)$ — из начального условия,

$u_{0j}=\varphi(t_j)$, $u_{nj}=\psi(t_j)$ — из краевых условий.

Для определения значений во внутренних точках применяют формулы

$$\text{при } \sigma=\frac{1}{2} \qquad u_{i,j+1}=\frac{u_{i-1,j}+u_{i+1,j}}{2},$$

$$\text{при } \delta=\frac{1}{6} \qquad u_{i,j+1}=\frac{1}{6}(u_{i+1,j}+4u_{ij}+u_{i-1,j}).$$

3^0. **Смешанная задача для уравнения колебания струны** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ состоит в отыскании функции $u(x, t)$, удовлетворяющей данному уравнению, начальным условиям $u(x, 0)=f(x)$, $u_t(x, 0)=\Phi(x)$, $0\leqslant x\leqslant l$ и краевым условиям $u(0, t)=\varphi(t)$, $u(l, t)=\psi(t)$.

Используя метод сеток, выбирают шаг h по осям Ox и Ot и строят сетку со значениями $x_i=ih$, $t_j=jh$ $(i=0, 1, \ldots, n;\ j=0, 1, 2, \ldots)$.

Для определения значений функции $u_{ij}=u(x_i, t_j)$ применяют формулы

$u_{i0}=f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ — нулевой слой;

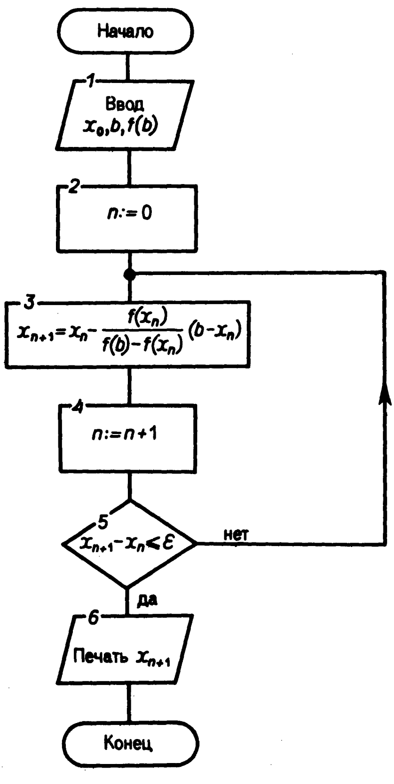
$u_{i1}=\frac{1}{2}(f_{i-1}+f_{i+1})+h\cdot\Phi_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ — первый слой;

$u_{i,\,j+1}=u_{i+1,\,j}+u_{i-1,\,j}-u_{i,\,j-1}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n;\ j=2, 3, \ldots)$.

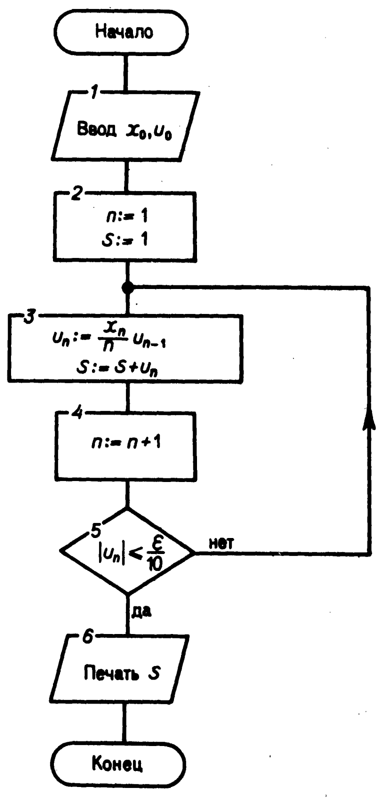
ПРИЛОЖЕНИЕ 2

БЛОК-СХЕМЫ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ

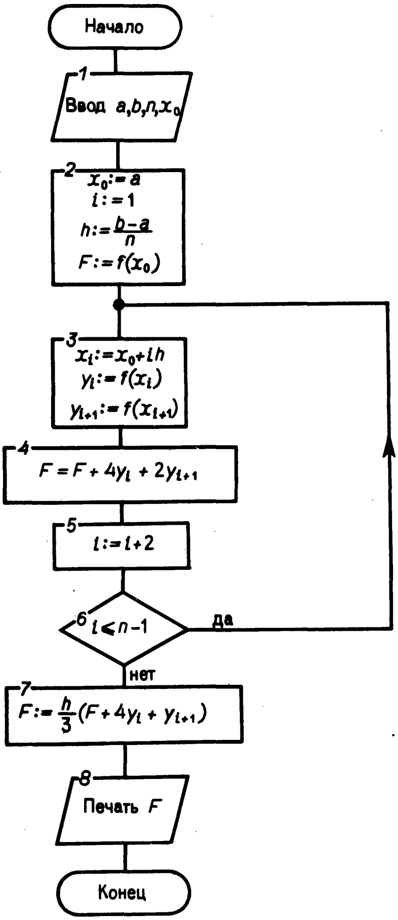
Блок-схема вычислений с помощью метода хорд



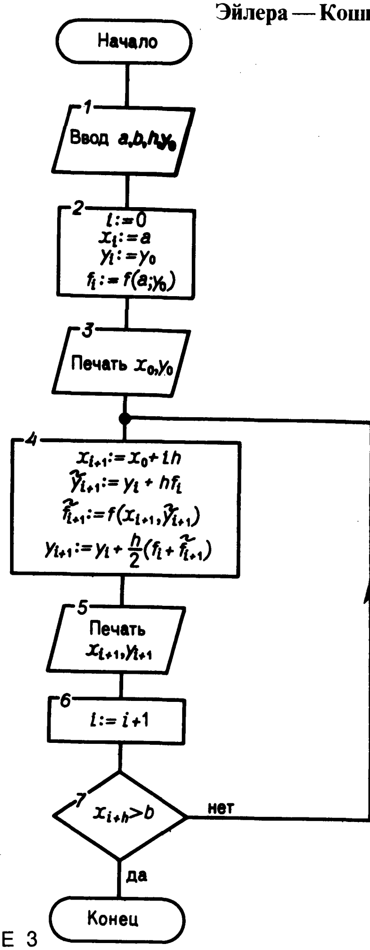
Блок-схема вычисления e^x методом степениых рядов



Блок-схема вычисления интеграла по формуле Симпсона



Блок-схема решения задачи Коши методом Эйлера — Коши



ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ПРОГРАММЫ НЕКОТОРЫХ РАСЧЕТОВ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЕ «ЭЛЕКТРОНИКА БЗ-34»

1^0. **Метод итераций для системы линейных уравнений.** При решении системы четырех линейных уравнений методом итераций выполняют вычисления вида

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + a_3 x_3^{(k-1)} + a_4 x_4^{(k-1)} + a_5.$$

Значения данных величин заносят в регистры памяти: $a_1 \to$П1; $a_2 \to$П2; $a_3 \to$П3; $a_4 \to$П4; $a_5 \to$П5; $x_1^{(k-1)} \to$ПА; $x_2^{(k-1)} \to$ПВ; $x_3^{(k-1)} \to$ПС; $x_4^{(k-1)} \to$ПД.

При вычислении $x_1^{(k)}$ используют программу: ИП1; ↑; ИПА; ×; ↑; ИП2; ↑; ИПВ; ×; +; ↑; ИП3; ↑; ИПС; ×; +; ↑; ИП4; ↑; ИПД; ×; +; ↑; ИП5; +; с/п.

Меняя содержимое регистров памяти, можно находить значения других переменных.

2^0. **Метод хорд для уточнения корня нелинейного уравнения с постоянным концом.** Для вычислений применяют формулу

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n);\quad x_0=a.$$

Вычисления выполняют, используя критерий $x_{n+1}-x_n\leqslant\varepsilon$, где ε — заданная точность. Информацию распределяют по регистрам памяти: $b\to$ПА; $f(b)\to$ПВ; $x_n\to$П1; $f(x)\to$П2.

Программа вычислений: ИП2; ↑; ИПВ; ↑; ИП2; −; ÷; ↑; ИПА; ↑; ИП1; −; ×; /−/; ИП1; +; П1; с/п; в/о.

3^0. **Вычисление значений функции e^x методом степенных рядов.** Здесь применяют формулу $e^x\approx\sum_{i=0}^{n}U_n$, где $u_0=1$, $u_n=\frac{x}{n}u_{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ ...)$.

Вычисления выполняют, используя $|U_n|\leqslant\varepsilon/10$, где ε — заданная точность.

Регистры памяти содержат: $x\to$П1; $n\to$П2; $U_n\to$П3; $\sum\to$П4. Первоначально в эти регистры заносят $x\to$П1; $0\to$П2; $1\to$П3; $1\to$П4.

Программа вычислений: ИП2; 1; +; П2; ИП1; ИП2; ÷; ИП3; ×; П3; с/п; ИП4; +; П4; с/п; в/о;

Программа предусматривает фиксирование отдельных слагаемых и сумм.

4^0. **Вычисление значений функции $y=\sqrt[3]{x}$ методом итераций.** Составляют последовательность значений вида $y_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2y_n+\frac{x}{y_n^2}\right)$, где y_0 определяется прикидкой. Вычисления продолжают до выполнения условия $|y_n-y_{n-1}|\leqslant\varepsilon/2$, где ε — заданная точность. Регистры памяти содержат: $x\to$ПА; $y\to$П1. Первоначально в эти регистры заносят $x\to$ПА; $y_0\to$П1.

Программа вычислений: ИПА; ↑; ИП1; Fx^2; ÷; ↑; ИП1, 2; ×; +; ↑; 3; ÷; П1; с/п.

5^0. **Интегрирование по формуле Симпсона.** Эта формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+\ ...\ +y_n).$$

Здесь $n=2k$, $y_i=f(x_i)$, $x_i=a+ih$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ ...)$, $h=(b-a)/n$.

Рассматривают программу вычислений по формуле с фиксированием номера функции в процессе вычислений. Значения a, b, n, h, x_i, $f(x_i)$ заносят в регистры памяти: $a\to$ПА; $b\to$ПВ; $n\to$ПС; $h\to$ПД; $x_i\to$П1; $f(x_i)\to$П2; $i\to$П4.

Программа вычислений: ИПВ; ↑; ИПА; «−»; ИПС; ÷; ПД; ИП1; ...; ИП2; П3; с/п; ИП4; ↑; 1; +; П4; с/п; ИП1; ↑; ИПД; +; П1; с/п; ИП1; ...; ИП2; ↑; 4; x; ИП3; +; П3; ИП4; ↑; 1; +; П4; с/п; ...; ИП2; ↑; 2; ×; ИП3; +; П3; ...; ИП3; ↑; 3; ÷; ИПД; x; с/п.

Программа предусматривает наличие подпрограммы для вычисления значений функции $f(x_i)$, а также повторение отдельных ее фрагментов, зависящих от номера i.

6^0. **Приближенное решение дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ методом Эйлера — Коши.** Этот метод предусматривает наличие условия $y(a)=y_0$; шага h, отрезка $[a, b]$; применение формулы

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1}),$$

где $f_{i+1}=f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, $\tilde{y}_{i+1}=y_i+hf_i$.

Регистры памяти содержат: $x_i\to$ПА; $y_i\to$ПВ; $f(x_i, y_i)\to$ПС; $h\to$ПД; $f_{i+1}\to$П1.

Программа вычислений: ИПА; ↑; ИПД; +; ПА; с/п; ИПС; ↑; ИП1; +ИПД; ×, 2; ÷; ИПВ; +; ПВ; с/п.

Приведенную программу следует пополнить программой вычисления значений $\tilde{y}_{i+1}$ и $\tilde{f}_{i+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по численным методам.— М.: Высш. школа, 1979.
2. Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О. П., Смирнов Г. Л. Вычислительная математика.— М.: Высш. школа, 1985.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики.— М.: Наука, 1970.
4. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. 3. Численные методы анализа.— М.: Наука, 1968.
5. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.— М.: Наука, 1986.
6. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах.— М.: Наука, 1972.
7. Пухначев Ю. В., Данилов И. Д. Микрокалькуляторы для всех.— М.: Знание, 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Воробьева Галина Николаевна
Данилова Александра Николаевна

ПРАКТИКУМ
ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Зав. редакцией Е. С. Гридасова
Редактор А. М. Суходский
Мл. редактор Н. П. Майкова
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор А. К. Нестерова

ИБ № 8567

Изд. № ФМ-06. Сдано в набор 25.01.90. Подп. в печать 14.08.90. Формат 60×90 1/16. Бум. кн.-журн. Гарнитура таймс. Печать офсетная. Объем 13,0 усл. печ. л. 13,25 усл. кр.-отт. 12,38 уч.-изд. л. Тираж 90 000 экз. Зак. № 1258. Цена 35 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Набрано в ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по печати. 113054, Москва, Валовая, 28. Отпечатано в Ярославском полиграфкомбинате Госкомпечати СССР. 150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.